

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Grafo da Ramificação para Representações Irredutíveis de Grupos Simétricos

Isomorfismo com o Grafo de Young

Tânia Sofia Zaragoza Cotrim Silva

Dissertação
Mestrado em Matemática

2014

Universidade de Lisboa
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática



Grafo da Ramificação para Representações Irredutíveis de Grupos Simétricos

Isomorfismo com o Grafo de Young

Tânia Sofia Zaragoza Cotrim Silva

Dissertação
Mestrado em Matemática

Orientador: Pedro J. Freitas

2014

Céptico como os cépticos, crente como os crentes.
A metade que avança é crente, a metade que confirma é céptica.
Mas o cientista perfeito é também jardineiro: acredita
que a beleza é conhecimento.

(Gonçalo M. Tavares)

Agradecimentos

Ao professor Pedro J. Freitas, pelo apoio e orientação durante a realização desta dissertação, mas acima de tudo pela amizade e por um dia, há muitos anos atrás, me ter feito ver que a Matemática faz mais parte de mim do que eu julgava.

Ao Filipe, pela infinita paciência, pelo incentivo, pela racionalidade nas horas críticas e por ser o companheiro que eu sempre desejei.

Aos meus pais, porque não teria conseguido sem o seu apoio, em particular ao meu pai que sempre soube que o meu futuro passaria por aqui.

Resumo

Neste trabalho provamos que o grafo da ramificação, construído através das classes de equivalência das representações irredutíveis de S_n e das respectivas componentes irredutíveis das restrições a S_{n-1} , coincide, tanto nos vértices como nos caminhos, com o grafo de Young, constituído pelos diagramas de Young de partições de n e respectivos diagramas que se obtêm quando subtraída uma caixa removível. Para atingir esse objetivo recorreremos a elementos particulares da álgebra do grupo simétrico e indexámos os caminhos do grafo da ramificação a um conjunto de vetores de \mathbb{Z}^n ao qual também conseguimos indexar os caminhos do grafo de Young, utilizando nesse caso os quadros de Young *standard*.

Palavras-chave: representação, grupo simétrico, diagrama de Young, álgebra de Gelfand-Zetlin, base de Gelfand-Zetlin, elemento de Jucys-Murphy

Abstract

In this paper we prove that the branching graph, built through the equivalence classes of irreducible representations of S_n and the respective irreducible components of the restrictions to S_{n-1} , coincides, both in vertices as in paths, with the Young graph, composed of Young diagrams of partitions of n and the respective diagrams that are obtained when subtracted a removable box. To achieve this goal we resorted to particular elements of the symmetric group algebra and indexed the paths of the branching graph to a set of \mathbb{Z}_n vectors, to which we could also index the paths of Young graph, using, in this case, Young tableaux.

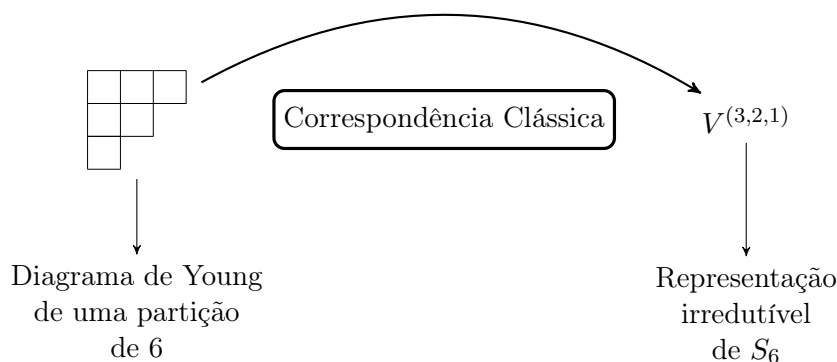
Keywords: representation, symmetric group, Young diagram, Gelfand-Zetlin algebra, Gelfand-Zetlin basis, Jucys-Murphy element

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Generalidades | 1 |
| 1.1 | Grupo Simétrico | 1 |
| 1.2 | Álgebra do Grupo | 11 |
| 1.3 | Representações e Módulos | 18 |
| 2 | Grafo da Ramificação | 29 |
| 2.1 | Vértices e Arestas | 29 |
| 2.2 | Descrição dos caminhos | 31 |
| 2.2.1 | Base e Álgebra de Gelfand-Zetlin | 33 |
| 3 | Grafo de Young | 37 |
| 3.1 | Vértices e Arestas | 37 |
| 3.2 | Descrição dos caminhos | 41 |
| 3.2.1 | Quadro de Young <i>standard</i> | 42 |
| 4 | Espetro e Resumo | 47 |
| 4.1 | Pesos e Espetro | 47 |
| 4.1.1 | Álgebra de Hecke | 52 |
| 4.2 | Conteúdos e Resumo | 60 |
| 4.3 | Resultados Principais | 64 |
| | Bibliografia | 69 |
| | Índice Remissivo | 71 |

Introdução

Desde há muito que se conhece a relação entre partições de um número natural e representações irredutíveis do grupo simétrico. Esta relação tem sido classicamente estabelecida através de diagramas de Young — pictogramas utilizados para representar partições que, por vezes, surgem preenchidos com uma série de números naturais, dando-se o nome, neste caso, de quadros de Young. Podemos encontrar uma forma de estabelecer esta correspondência em Fulton & Harris [FH] ou em Curtis & Reiner [CR].



Muito resumidamente, estes autores garantem-nos que para cada natural n obtemos uma coleção de quadros de Young canónicos $\{Q\}$ onde podemos considerar, para cada um deles, o grupo das permutações de linha, $L(Q)$, e o grupo das permutações de coluna, $C(Q)$, podendo assim obter um elemento particular da álgebra do grupo, conhecido como *simetrizador de Young*¹, \mathfrak{s}_Q , dado pelo seguinte somatório

$$\mathfrak{s}_Q := \sum_{\substack{p \in L(Q) \\ q \in C(Q)}} \varepsilon(q) pq \in \mathbb{C}S_n.$$

Com alguma teoria de módulos e anéis, tendo em conta que as representações irredutíveis de S_n podem ser vistas como módulos irredutíveis sobre a álgebra do grupo, consegue-se provar que:

Quando Q percorre todos os quadros de Young canónicos associados a partições de n , $\{\mathbb{C}S_n \cdot \mathfrak{s}_Q\}$ é uma coleção completa de módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis não isomorfos.

¹Tradução de *Young symmetrizer*, designação utilizada em [FH].

Sendo assim, partindo de uma partição λ de um número natural n chegamos a uma representação irredutível de S_n , V^λ , sendo até possível determinar o grau da representação através da *fórmula dos comprimentos de gancho*²

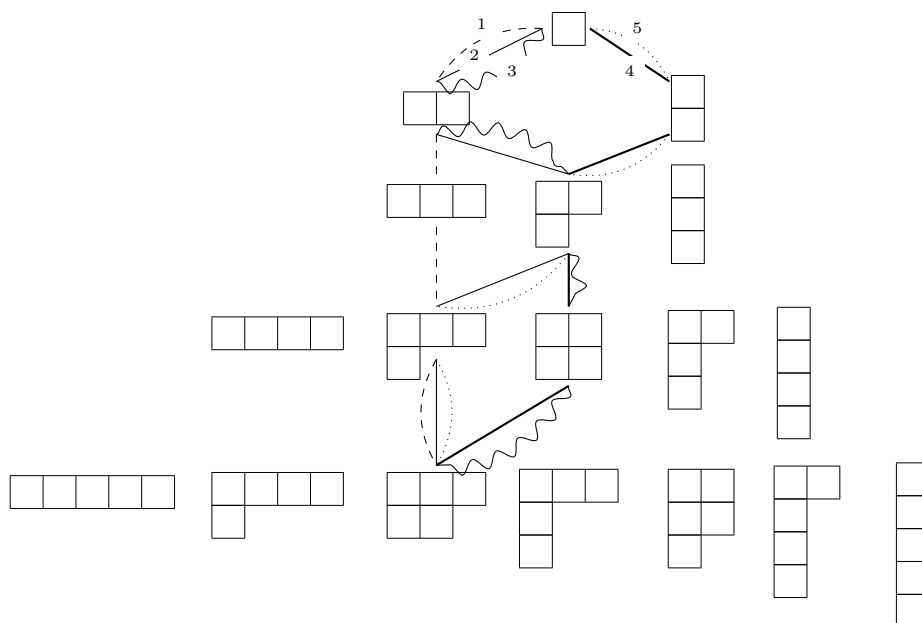
$$\dim(V^\lambda) = \frac{n!}{\prod (\text{comprimentos de gancho})}$$

onde para cada caixa do diagrama o seu comprimento de gancho corresponde à soma do número de caixas na mesma linha e à direita com o número de caixas na mesma coluna e abaixo da caixa, incluindo a própria.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \dim(V^{(3,2)}) = \frac{5!}{4 \times 3 \times 2} = 5$$

Por outro lado também é possível determinarmos o grau de uma dada representação irredutível ao observarmos o grafo de Young e contabilizarmos todos os caminhos que nos levam desde o único vértice do primeiro nível até ao vértice da partição correspondente à nossa representação, onde em cada caminho um diagrama é obtido do anterior acrescentando uma caixa.

No próximo esquema contabilizamos o número de caminhos que nos levam desde o único diagrama do nível 1 até ao diagrama da partição (3,2) do número 5. Cada caminho encontra-se identificado com um tipo de linha (tracejada, fina, ondulante, cheia, ponteadada).



$$\therefore \dim(V^{(3,2)}) = 5.$$

²Tradução de *hook length formula*, designação utilizada em [FH].

Além disso, pelo Teorema de Maschke, sabemos que a restrição de uma representação irredutível de S_n a S_{n-1} decompõe-se numa soma direta de representações irredutíveis de S_{n-1} . Por outro lado, quando estamos perante um diagrama de Young associado a uma partição de n , existem caixas passíveis de serem removidas de forma a obtermos novos diagramas de Young, desta feita associados a partições de $n-1$.

Tendo em conta estas duas linhas de raciocínio, podemos pôr em hipótese a seguinte questão:

Existirá uma bijeção entre os diagramas de Young de partições de $n-1$ obtidos e as representações irredutíveis que surgem na decomposição de V^λ a S_{n-1} ?

A resposta a esta questão é afirmativa e para estabelecer esta correspondência poderosa entre estas entidades iremos seguir a abordagem feita por Okounkov & Vershik [OV] e Kleshchev [KI].

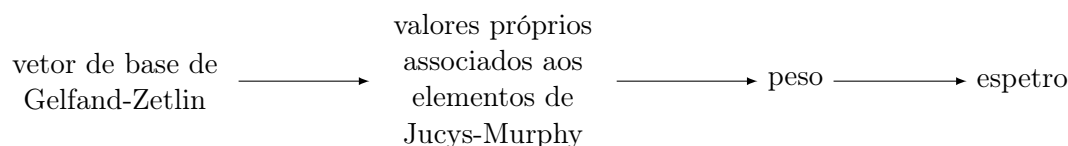
Deixando a correspondência clássica para trás, iremos analisar uma representação irredutível de S_n , V_n , e começamos por pensar na sua restrição a S_{n-1} , depois a S_{n-2} , e assim sucessivamente até S_1 . Podemos então estabelecer uma cadeia de representações

$$V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n$$

onde cada V_i é uma representação irredutível de S_i .

Sabendo que V_1 será obrigatoriamente uma representação de grau 1, iremos considerar um vetor não nulo de V_1 , v , a que chamamos vetor de base Gelfand-Zetlin, que provaremos tratar-se de um vetor próprio de n elementos particulares de álgebra do grupo S_n , que terão o nome de elementos de Jucys-Murphy.

À lista dos valores próprios associados a v em relação aos n elementos de Jucys-Murphy iremos chamar de peso de v (tanto como peso da representação) e existirão tantas listas distintas como caminhos no grafo da ramificação que nos levam desde a única classe de equivalência de representações irredutíveis de S_1 até à classe de equivalência da representação irredutível de S_n que estivermos a considerar. Ao conjunto dos pesos de todos os vetores de bases Gelfand-Zetlin de todas as representações irredutíveis de S_n damos o nome de espectro de grau n .



Por outro lado, se pensarmos no diagrama de Young associado a uma partição de n e o preenchermos com os primeiros n naturais de forma crescente ao longo das linhas e ao longo das colunas, obteremos o que se chama de quadro de Young *standard* e a cada um destes quadros irá corresponder um único caminho no grafo de Young que nos leva desde a única partição de 1 até à partição que estivermos a considerar. A cada natural introduzido num quadro de Young *standard* iremos associar a diferença entre o número

da coluna e o número da linha da caixa onde se encontra, a que iremos dar o nome de resíduo.

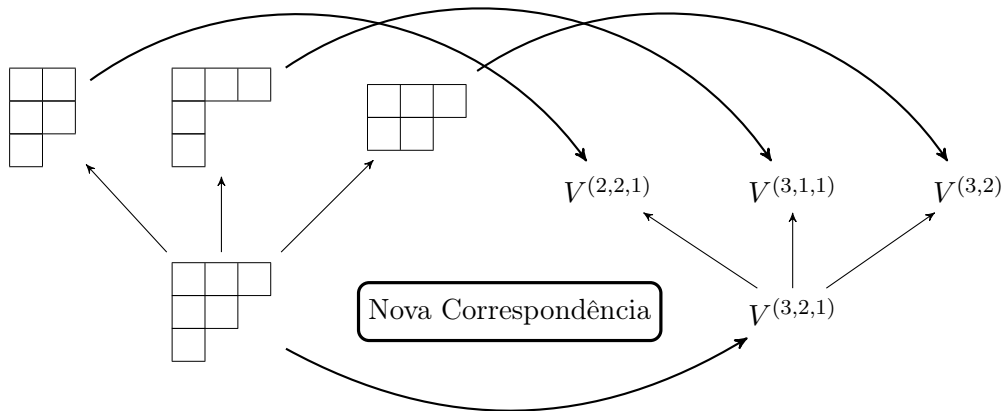
À lista de resíduos associados aos n naturais presentes num quadro de Young *standard* damos o nome de conteúdo do quadro. Ao conjunto dos conteúdos de todos os quadros de Young *standard* associados a partições de n damos o nome de resumo de grau de n .

quadro de
Young *standard* \longrightarrow resíduos \longrightarrow conteúdo \longrightarrow resumo

Iremos terminar este trabalho a provar que

$$\text{espetro de grau } n = \text{resumo de grau } n$$

o que nos vai garantir que os caminhos no grafo da ramificação coincidem com os caminhos no grafo de Young e por isso conseguiremos provar que as representações irredutíveis que surgem na decomposição da restrição a S_{n-1} de uma representação irredutível de S_n correspondem aos diagramas de Young que surgem quando retiramos uma caixa removível do diagrama de Young associado à representação irredutível de S_n .



Capítulo 1

Generalidades

Neste primeiro capítulo iremos apresentar alguns conceitos básicos relacionados com o grupo simétrico, a álgebra do grupo, a teoria de representação e a teoria dos módulos, sendo estes os principais campos onde todo o nosso trabalho se irá desenvolver.

Iremos citar o Teorema de Maschke, o Lema de Schur e o Teorema de Wedderburn-Artin, resultados clássicos que servirão de pedras basilares à abordagem que será feita à Teoria da Representação de Grupos Simétricos desenvolvida nos capítulos subsequentes e também iremos demonstrar alguns resultados que consideramos de relevância significativa para a fundamentação desta teoria.

Serviram de referência para este capítulo, Monteiro [Mo], Brison [Br], Nogueira [No], Freitas [Fr], Galvão [Ga], Fulton & Harris [FH], Curtis & Reiner [CR], Okounkov & Vershik [OV] e Kleshchev [Kl].

1.1 Grupo Simétrico

Para além da introdução de alguns conceitos relacionados com o grupo simétrico, nesta secção provaremos que a cada classe de conjugação em S_n corresponde um *modelo de ciclos* e a cada classe de conjugação- S_n em S_{n+m} corresponde um *modelo de ciclos com marcas* $\{n+1, \dots, n+m\}$.

Assumimos o conhecimento prévio dos seguintes conceitos: operação binária, tabela de Cayley, aplicação bijetiva, isomorfismo, composição de aplicações, relação de equivalência.

Salvo indicação em contrário, as letras minúsculas i, j, k, n, m irão corresponder sempre a números naturais.

Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação binária

$$\begin{aligned} \otimes : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \otimes h \end{aligned}$$

Dizemos que $G \equiv (G, \otimes)$ é **grupo** respeitante à operação \otimes se nele se verificam as seguintes propriedades:

1. *Associatividade:*

$$(g \circledast h) \circledast j = g \circledast (h \circledast j), \quad \forall g, h, j \in G;$$

2. *Existência de elemento neutro (ou elemento identidade):*

$$\exists e \in G : g \circledast e = e \circledast g = g, \quad \forall g \in G;$$

3. *Existência de elementos inversos:*

$$g \in G \Rightarrow \exists g^{-1} \in G : g \circledast g^{-1} = g^{-1} \circledast g = e.$$

Observações:

- Dizemos que o grupo G é *abeliano* ou *comutativo* se também temos

$$g \circledast h = h \circledast g \quad \forall g, h \in G;$$

- Se o conjunto G for finito dizemos que G é um *grupo finito*. Caso contrário dizemos que G é um *grupo infinito*.

Dizemos que um grupo G é **gerado por um conjunto finito** $X \subseteq G$ se todo o elemento do grupo pode ser expresso como produto (sob a operação do grupo) de elementos de X e dos seus inversos.

Nesse caso dizemos que X **gera** G .

Notação:

- Para simplificação de notação, de futuro escreveremos $g \cdot h$ ou simplesmente gh em vez de $g \circledast h$;
- Quando G for um conjunto finito iremos escrever $|G|$ para representar a cardinalidade (ou ordem) de G ;
- Por vezes iremos representar o elemento identidade do grupo G por e_G ;
- Quando o conjunto X gera o grupo G escrevemos $G = \langle X \rangle$.

Sejam n um número natural e $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Uma aplicação bijetiva

$$\sigma : [n] \rightarrow [n]$$

diz-se uma **permutação** de $[n]$.

Exemplo 1. As permutações de $[3]$ são:

$$\begin{array}{lll}
 \sigma_1 : [3] \longrightarrow [3] & \sigma_2 : [3] \longrightarrow [3] & \sigma_3 : [3] \longrightarrow [3] \\
 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 2 & 1 \mapsto 3 \\
 2 \mapsto 2 & 2 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 \\
 3 \mapsto 3 & 3 \mapsto 3 & 3 \mapsto 1 \\
 \\
 \sigma_4 : [3] \longrightarrow [3] & \sigma_5 : [3] \longrightarrow [3] & \sigma_6 : [3] \longrightarrow [3] \\
 1 \mapsto 1 & 1 \mapsto 2 & 1 \mapsto 3 \\
 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 3 & 2 \mapsto 1 \\
 3 \mapsto 2 & 3 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2
 \end{array}$$

Notação:

- Iremos representar por S_n o conjunto de todas as permutações de $[n]$;
- Seja $\sigma \in S_n$. Podemos representar σ por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Dá-se o nome de **Grupo Simétrico de grau n** à estrutura algébrica

$$S_n \equiv (S_n, \circ)$$

onde \circ corresponde à operação binária composição de aplicações.

Observações: $|S_n| = n!$ e por isso S_n é sempre um grupo finito.

Exemplo 2. A tabela de Cayley do grupo S_3 é dada por

| \circ | (1) | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (1) | (1) | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
| (1 2) | (1 2) | (1) | (1 3 2) | (1 2 3) | (2 3) | (1 3) |
| (1 3) | (1 3) | (1 2 3) | (1) | (1 3 2) | (1 2) | (2 3) |
| (2 3) | (2 3) | (1 3 2) | (1 2 3) | (1) | (1 3) | (1 2) |
| (1 2 3) | (1 2 3) | (1 3) | (2 3) | (1 2) | (1 3 2) | (1) |
| (1 3 2) | (1 3 2) | (2 3) | (1 2) | (1 3) | (1) | (1 2 3) |

que facilmente observamos não se tratar de um grupo comutativo.

Proposição 1.1.1. *Se considerarmos que uma permutação de S_n quando estendida a $[n+1]$ comporta-se da mesma forma para todos os elementos até n e fixa o elemento $n+1$ podemos dizer que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $S_n \subset S_{n+1}$. Ou seja,*

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$$

forma uma cadeia de grupos finitos.

Dizemos que $\sigma \in S_n$ é um **ciclo de comprimento** k se existem $i_1, \dots, i_k \in [n]$, distintos, tais que:

$$\sigma : i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1$$

e os restantes elementos de $[n]$ são fixos por σ .

Dizemos que a permutação identidade, que fixa todos os elementos de $[n]$, é um ciclo de comprimento 1.

Notação: Seja $\sigma \in S_n$ um ciclo de comprimento k e sejam i_1, \dots, i_k os elementos distintos de $[n]$ que verificam

$$\sigma : i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1.$$

Podemos representar σ por

$$(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k).$$

Exemplo 3. Seja $\sigma \in S_5$. A mesma permutação pode ser representada de diferentes formas

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) = (3 \ 4 \ 2 \ 5 \ 1).$$

Exemplo 4. Relativamente ao exemplo 1, temos que

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1), & \sigma_2 &= (1 \ 2), & \sigma_3 &= (1 \ 3), \\ \sigma_4 &= (2 \ 3), & \sigma_5 &= (1 \ 2 \ 3), & \sigma_6 &= (1 \ 3 \ 2). \end{aligned}$$

Observações: Se $\sigma = (i_1 \ \dots \ i_k)$ então $\sigma^{-1} = (i_k \ \dots \ i_1)$.

Exemplo 5. Considerando $\sigma = (1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) \in S_5$ temos que $\sigma^{-1} = (5 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1)$ pois

$$(1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5)(5 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1) = (5 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1)(1 \ 3 \ 4 \ 2 \ 5) = (1) = e_{S_5}.$$

Se $\sigma = (i_1 \ \dots \ i_p)$ e $\tau = (j_1 \ \dots \ j_q)$ e $i_t \neq j_s, \forall t \in \{1, \dots, p\}, \forall s \in \{1, \dots, q\}$, dizemos que σ e τ são **ciclos disjuntos**.

Observações: Se σ e τ são ciclos disjuntos tem-se que

$$\sigma\tau = \tau\sigma.$$

Proposição 1.1.2. *Todo o $\sigma \in S_n \setminus \{(1)\}$ decompõe-se de forma única (a menos da ordem dos fatores) como produto de ciclos disjuntos.*

Exemplo 6. Consideremos $\sigma = (1\,4\,5\,7\,2)(3\,1\,6\,5) \in S_7$. Podemos representar σ como um produto de ciclos disjuntos da seguinte forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1\,6\,7\,2)(3\,4\,5).$$

Dizemos que um elemento de S_n é uma **transposição** ser for um ciclo de comprimento 2.

Se uma transposição for da forma

$$s_i := (i\,i+1) \quad (i < n)$$

dizemos que se trata de uma **transposição básica**.

Proposição 1.1.3. *Os seguintes conjuntos geram S_n :*

- [1] *Todas as transposições de S_n ;*
- [2] *Todas as transposições básicas de S_n .*

Exemplo 7. Considerando a permutação σ do exemplo 3, também a podemos escrever como um produto de transposições e de transposições básicas

$$\sigma = (1\,3\,4\,2\,5) = (1\,3)(3\,4)(4\,2)(2\,5) = (4\,5)(2\,3)(3\,4)(4\,5)(1\,2)(2\,3)(3\,4)(4\,5).$$

Observações:

- O ponto [2] da proposição 1.1.3 irá desempenhar um papel preponderante na secção 4.1.1 deste trabalho pois o facto do Grupo Simétrico ser um Grupo de Coxeter e as suas transposições básicas serem os geradores de Coxeter motivou a orientação do estudo feito nessa parte. Mais informação sobre Grupos de Coxeter poderá ser consultada em Bjorner & Brenti [BB];
- A primeira etapa fundamental deste trabalho irá consistir na demonstração que a restrição de um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível a S_{n-1} é livre de multiplicidade e nesse sentido necessitamos de perceber a importância dos *modelos de ciclos*¹ e dos *modelos de ciclos com marcas*² que funcionam como órbitas da ação de S_{n-1} em S_n por conjugação.

Duas permutações $\sigma, \tau \in S_n$ dizem-se **conjugadas** se

$$\exists \pi \in S_n : \quad \pi \sigma \pi^{-1} = \tau.$$

¹Tradução de *cycle shape*, designação utilizada em [Kl].

²Tradução de *marked cycle shape*, designação utilizada em [Kl].

Exemplo 8. Consideremos $\pi = (1\ 3\ 4)(5\ 7)$ e $\sigma = (2\ 7\ 1)(6\ 3\ 4)$ elementos de S_7 . Temos que

$$\pi^{-1} = (4\ 3\ 1)(7\ 5) \quad \text{e} \quad \pi\sigma\pi^{-1} = (1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3)$$

Então a permutação $\tau = (1\ 6\ 4)(2\ 5\ 3) \in S_7$ diz-se conjugada de σ .

Proposição 1.1.4. *A relação de conjugação de permutações é uma relação de equivalência.*

Notação:

- As classes de equivalência da relação de conjugação dizem-se *classes de conjugação* e iremos representar a classe de σ por $[\sigma]$;
- Iremos representar por S_n^\vee o conjunto de todas as classes de conjugação de S_n .

O **modelo de ciclos** associado a um elemento de S_n corresponde ao padrão estabelecido pelos comprimentos dos vários ciclos que constituem a sua decomposição em ciclos disjuntos, considerando também os ciclos de comprimento 1.

Exemplo 9. Consideremos $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(7\ 1\ 4\ 2)(3\ 4\ 2) \in S_7$. Temos que

$$\sigma = (2\ 5\ 7\ 3)(1\ 4)(6)$$

por isso o modelo de ciclos associado a σ pode ser representado da seguinte forma

$$(*\ *\ *\ *)(*\ *)(*).$$

Proposição 1.1.5. *Duas permutações de S_n são conjugadas se e só se têm o mesmo modelo de ciclos.*

Demonstração. Seja $\sigma \in S_n$.

Pela proposição 1.1.2 sabemos que existem $a_1, \dots, a_k \in [n]$ tais que

$$\sigma = (a_1\ \sigma(a_1)\ \dots\ \sigma^{q_1}(a_1)) \dots (a_k\ \sigma(a_k)\ \dots\ \sigma^{q_k}(a_k))$$

é um produto de ciclos disjuntos e onde para todo o $i \in \{1, \dots, k\}$

$$(a_i\ \sigma(a_i)\ \dots\ \sigma^{q_i}(a_i))$$

é um ciclo de comprimento $q_i + 1$.

Seja $\pi \in S_n$ e $x \in [n]$.

1.º caso Suponhamos que σ fixa x .

Temos que $\pi\sigma\pi^{-1}(\pi(x)) = \pi(x)$, ou seja, o elemento $\pi(x) \in [n]$ é fixado pela permutação $\pi\sigma\pi^{-1}$. Além disso, o recíproco também é verdadeiro.

\therefore Existem tantos elementos de $[n]$ fixados por σ como por $\pi\sigma\pi^{-1}$.

2.º caso Suponhamos que σ não fixa x .

Sendo assim, sabemos que existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que x é um dos elementos do ciclo $(a_i \sigma(a_i) \dots \sigma^{q_i}(a_i))$. Sem perda de generalidade consideremos $x = a_i$.

$$\forall j \in \{0, \dots, q_i - 1\}, \quad \pi \sigma \pi^{-1}(\pi \sigma^j(x)) = \pi(\sigma^{j+1}(x)) \neq \pi(\sigma^p(x))$$

para todo o $p \leq j$ e quando $j = q_i$ temos que

$$\pi \sigma \pi^{-1}(\pi \sigma^{q_i}(x)) = \pi \sigma(\sigma^{q_i}(x)) = \pi(x)$$

fechando um ciclo de comprimento $q_i + 1$.

$\therefore (\pi x_i \pi \sigma(x_i) \dots \pi \sigma^{q_i}(x_i))$ pertence à decomposição de $\pi \sigma \pi^{-1}$ num produto de ciclos disjuntos visto que os elementos que aparecem nos ciclos são permutados por π .

Pelos dois casos anteriores podemos concluir que $\pi \sigma \pi^{-1}$ e σ têm o mesmo número de ciclos para cada comprimento de ciclo, isto é, têm o mesmo modelo de ciclos. \square

Observações: Note-se que no exemplo 8, σ e τ têm o mesmo modelo de ciclos.

Corolário 1.1.6. *Existem tantas classes de conjugação em S_n como modelos de ciclos de S_n distintos.*

Se G é um grupo e X um conjunto, então dizemos que a **ação** (esquerda) do grupo G em X é a aplicação

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. *Compatibilidade:*

$$gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x), \quad \forall g, h \in G \text{ e } x \in X;$$

2. *Identidade*

$$e_G \cdot x = x, \quad \forall x \in X.$$

Observações:

- Se considerarmos a aplicação

$$\begin{aligned} S_n \times S_{n+m} &\longrightarrow S_{n+m} \\ (\pi, \sigma) &\mapsto \pi \cdot \sigma \end{aligned}$$

esta define, nitidamente, uma ação de S_n em S_{n+m} , considerando S_n como subgrupo de S_{n+m} , como foi observado na proposição 1.1.1;

- O mergulho por defeito de S_n em S_{n+m} diz respeito aos primeiros n números;
- Uma cópia de S_m mergulhada em S_{n+m} como conjunto das permutações dos últimos m números denotaremos por $S'_{m,n+m}$;
- Tendo em conta a proposição 1.1.1 vamos considerar que se $\pi \in S_n$ e $x \in \{n+1, \dots, n+m\}$ então π fixa x , ou seja, $\pi(x) = x$.

Duas permutações $\sigma, \tau \in S_{n+m}$ dizem-se **conjugadas- S_n** se

$$\exists \pi \in S_n : \pi \sigma \pi^{-1} = \tau.$$

Exemplo 10. Consideremos $\pi = (1\ 3\ 2) \in S_3$ e $\sigma = (2\ 7\ 1)(6\ 3\ 4) \in S_{3+4}$. Temos que

$$\pi \sigma \pi^{-1} = (1\ 3\ 2)(2\ 7\ 1)(6\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 7\ 3)(6\ 2\ 4).$$

Sendo assim, diz-se que o elemento $\tau = (1\ 7\ 3)(6\ 2\ 4) \in S_{3+4}$ é conjugado- S_3 de σ .

Observações:

- A relação conjugação- S_n em S_{n+m} é também uma relação de equivalência;
- Duas permutações de S_{n+m} conjugadas- S_n são, em particular, conjugadas.

Um modelo de ciclos de S_{n+m} diz-se um **modelo de ciclos com marcas** $\{a_1, \dots, a_k\} \subset [n+m]$ quando as posições dos elementos a_i , para todo o $i \leq k$, já se encontram definidas no modelo de ciclos.

Exemplo 11. Em S_{9+5} , ao modelo de ciclos com marcas $\{10, 11, 12, 13, 14\}$

$$(10\ *\ *\ *\ * 14)(*\ *\ *) (12\ 11\ *\ 13)(*) \quad (1.1)$$

associamos todas as permutações que se obtêm inserindo os números de 1 a 9, sem repetir, no lugar dos asteriscos³.

Observações:

- Outra forma de denotarmos os modelos de ciclos com marcas⁴ é substituírmos as cadeias de asteriscos por setas indexadas com o número de “lugares vagos” para se colocarem as entradas em falta, por isso, o modelo de ciclos (1.1) pode ainda ser representado da seguinte forma

$$(10 \xrightarrow{4} 14)(\xrightarrow{3})(12\ 11 \xrightarrow{1} 13)(\xrightarrow{1});$$

- Um modelo de ciclos de S_{n+m} terá os últimos m elementos já posicionados e a soma dos índices colocados nas setas (total de asteriscos) terá de ser igual a n .

³Representação utilizada em [KI].

⁴Representação utilizada em [OV].

Proposição 1.1.7. *Dois elementos de S_{n+m} são conjugados- S_n se e só se têm o mesmo modelo de ciclos com marcas $\{n+1, \dots, n+m\}$.*

Demonstração. Sejam $\pi \in S_n$, $\sigma \in S_{n+m}$ e

$$(a \ \sigma(a) \ \dots \ \sigma^q(a)) \quad (1.2)$$

um dos fatores da decomposição de σ num produto de ciclos disjuntos. Pela proposição 1.1.5 sabemos que σ e $\pi\sigma\pi^{-1}$ têm o mesmo modelo de ciclos e que

$$\pi(a \ \sigma(a) \ \dots \ \sigma^q(a))\pi^{-1} = (\pi(a) \ \pi(\sigma(a)) \ \dots \ \pi(\sigma^q(a))). \quad (1.3)$$

1.º caso Suponhamos que $\sigma^j(a) \in [n]$ para todo o $j \geq 0$.

Podemos então associar o ciclo (1.2) ao modelo de ciclos

$$\left(\xrightarrow{q+1} \right)$$

onde os lugares vagos são preenchidos exclusivamente com elementos de $[n]$.

Neste caso temos necessariamente $\pi(\sigma^j(a)) \in [n]$ para todo o j e por isso

$$\therefore \pi\left(\xrightarrow{q+1}\right)\pi^{-1} = \left(\xrightarrow{q+1}\right).$$

2.º caso Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a, \sigma^{p_1}(a), \dots, \sigma^{p_k}(a) \notin [n]$ e que os restantes elementos do ciclo pertencem a $[n]$, com $p_1 < \dots < p_k$.

Podemos então associar o ciclo (1.2) ao seguinte modelo de ciclos com marcas $\{a, \sigma^{p_1}(a), \dots, \sigma^{p_k}(a)\}$

$$(a \xrightarrow{b_0} \sigma^{p_1}(a) \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{k-1}} \sigma^{p_k}(a) \xrightarrow{b_k})$$

onde os lugares vagos são preenchidos exclusivamente com elementos de $[n]$,

$b_{i-1} = p_i - 1$, $\forall i \leq k$, e $b_k = q - p_k$.

Atendendo ao facto de $\pi(x) = x$ quando $x \notin [n]$, $\pi(x) \in [n]$ quando $x \in [n]$ e à igualdade (1.3) temos que

$$\therefore \pi(a \xrightarrow{b_0} \sigma^{p_1}(a) \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{k-1}} \sigma^{p_k}(a) \xrightarrow{b_k})\pi^{-1} = (a \xrightarrow{b_0} \sigma^{p_1}(a) \xrightarrow{b_1} \dots \xrightarrow{b_{k-1}} \sigma^{p_k}(a) \xrightarrow{b_k}).$$

Atendendo aos dois casos anteriores, podemos concluir que se associa o mesmo modelo de ciclos com marcas $\{n+1, \dots, n+m\}$ a duas permutações de S_{n+m} conjugadas- S_n . \square

Observações: Note-se que no exemplo 10, σ e τ têm o mesmo modelo de ciclos com marcas $\{4, 5, 6, 7\}$.

Corolário 1.1.8. *Existem tantas classes de conjugação- S_n em S_{n+m} como modelos de ciclos de S_{n+m} com marcas $\{n+1, \dots, n+m\}$.*

$$S_2 = \{(1), (1\ 2)\},$$
$$\begin{array}{lll}
(1\ 2)(1)(1\ 2)=(1), & (1\ 2)(1\ 2)(1\ 2)=(1\ 2), & (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)=(2\ 3), \\
(1\ 2)(1\ 4)(1\ 2)=(2\ 4), & (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)=(1\ 3), & (1\ 2)(2\ 4)(1\ 2)=(1\ 4), \\
(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)=(3\ 4), & (1\ 2)(2\ 3\ 4)(1\ 2)=(1), & (1\ 2)(2\ 4\ 3)(1\ 2)=(1\ 4\ 3), \\
(1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2)=(2\ 1\ 3), & (1\ 2)(1\ 2\ 4)(1\ 2)=(2\ 1\ 4), & (1\ 2)(1\ 3\ 4)(1\ 2)=(2\ 3\ 4), \\
(1\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 2)=(2\ 3\ 1), & (1\ 2)(1\ 4\ 2)(1\ 2)=(2\ 4\ 1), & (1\ 2)(1\ 4\ 3)(1\ 2)=(2\ 4\ 3), \\
(1\ 2)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)=(2\ 1)(3\ 4), & (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)=(2\ 1\ 3\ 4), & (1\ 2)(1\ 4\ 2\ 3)(1\ 2)=(2\ 4\ 1\ 3), \\
(1\ 2)(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2)=(2\ 3)(1\ 4), & (1\ 2)(1\ 2\ 4\ 3)(1\ 2)=(2\ 1\ 4\ 3), & (1\ 2)(1\ 3\ 2\ 4)(1\ 2)=(2\ 3\ 1\ 4), \\
(1\ 2)(1\ 4)(2\ 3)(1\ 2)=(2\ 4)(1\ 3), & (1\ 2)(1\ 3\ 4\ 2)(1\ 2)=(2\ 3\ 4\ 1), & (1\ 2)(1\ 4\ 3\ 2)(1\ 2)=(2\ 4\ 3\ 1).
\end{array}$$

| | Cardinalidade das classes de Conjugação em S_4 | Cardinalidade das classes de Conjugação- S_2 em S_4 |
|--------------|---|--|
| $\#S_4 = 24$ | $\#[(*)] = 1$ | $\#[(*)] = 1$ |
| | $\#[(**)] = 6$ | $\#[(**)] = 1$ |
| | | $\#[(*3)] = 2$ |
| | | $\#[(*4)] = 2$ |
| | | $\#[(34)] = 1$ |
| | $\#[(**)(**)] = 3$ | $\#[(**)(3\ 4)] = 1$ |
| | | $\#[(*3)(*4)] = 2$ |
| | $\#[(*\ * \ *)] = 8$ | $\#[(**\ 3)] = 2$ |
| | | $\#[(**\ 4)] = 2$ |
| | | $\#[(*3\ 4)] = 2$ |
| | | $\#[(*4\ 3)] = 2$ |
| | $\#[(*\ * \ *\ *)] = 6$ | $\#[(*\ * \ 3\ 4)] = 2$ |
| | | $\#[(*\ * \ 4\ 3)] = 2$ |
| | | $\#[(*3\ * \ 4)] = 2$ |

1.2 Álgebra do Grupo

A relevância da álgebra do grupo neste trabalho deve-se essencialmente ao facto de podermos encarar uma representação complexa de um grupo simétrico como módulo sobre a álgebra complexa desse mesmo grupo. Esta simples observação facilita bastante o nosso estudo pois permite-nos considerar elementos convenientes da álgebra do grupo e assim estudarmos algumas das suas propriedades e a partir daí caracterizarmos representações irredutíveis.

Os elementos da álgebra do grupo que de futuro irão adquirir um papel preponderante neste trabalho são os chamados elementos de Jucys-Murphy, tal como o fez Nazarov [Na], tendo em conta que foram introduzidos de forma independente por A. Jucys e G. Murphy na década de 70 do século XX.

Novamente só provaremos os resultados mais relevantes para os capítulos subsequentes, como por exemplo o facto do centralizador da álgebra de S_n na álgebra de S_{n+m} ser gerado por $S'_{m,n+m}$, pelo centro da álgebra de S_n e pelos elementos de Jucys-Murphy.

Assumimos o conhecimento prévio dos seguintes conceitos: anel, anel semisimples, anel simples, corpo, espaço vetorial.

Salvo indicação em contrário, V será sempre um espaço vetorial de dimensão finita e os seus elementos serão designados por vetores.

Seja \mathbb{K} um corpo. Um conjunto \mathcal{A} diz-se uma **álgebra- \mathbb{K}** se verificar as seguintes propriedades:

- [1] \mathcal{A} é um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} ;
- [2] \mathcal{A} é um anel associativo com identidade em relação à soma do espaço vetorial;
- [3] A multiplicação escalar e a multiplicação do anel estão relacionadas da seguinte forma:

$$(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b, \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Sejam G um grupo finito e \mathbb{K} um corpo. Ao conjunto $\mathbb{K}G$ de todas as somas formais

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g \quad \text{com } \alpha_g \in \mathbb{K}$$

dá-se o nome de **álgebra do grupo**.

Definem-se adição, multiplicação escalar e multiplicação em $\mathbb{K}G$ da seguinte forma:

$$\sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g := \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \beta := \sum_{g \in G} (\alpha_g \beta) g,$$

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) := \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \beta_{h^{-1}g} \right) g,$$

onde $\alpha_g, \beta_g, \alpha_h, \beta_{h^{-1}g} \in \mathbb{K}$.

Observações:

- O conjunto $\mathbb{K}G$ é uma álgebra- \mathbb{K} de dimensão $|G|$. Em particular, $\mathbb{C}S_n$ é uma álgebra- \mathbb{C} de dimensão $n!$;
- G é uma base de $\mathbb{K}[G]$ sobre \mathbb{K} .

O k -ésimo **elemento de Jucys-Murphy** ou, abreviadamente, **elemento-JM**, pertencente a $\mathbb{C}S_n$, define-se da seguinte forma:

$$J_k := (1\ k) + (2\ k) + \dots + (k-1\ k) = \sum_{i=1}^{k-1} (i\ k) \quad (1 < k \leq n).$$

Observações:

- Por convenção, $J_1 = 0$;
- Em $\mathbb{C}S_n$ existem n elementos de Jucys-Murphy;
- Os elementos J_k podem ser vistos como a soma de todas as transposições de S_k menos a soma de todas as transposições de S_{k-1} .

Exemplo 13. Em $\mathbb{C}S_4$ temos os seguintes elementos-JM

$$J_1 = 0, \quad J_2 = (12), \quad J_3 = (13) + (23), \quad J_4 = (14) + (24) + (34).$$

Proposição 1.2.1. Cada elemento J_k comuta com S_{k-1} .

Demonstração. Consideremos $k, i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i < j < k$.

Sabemos que $(i\ j) \in S_{k-1}$ e que $(i\ k)$ e $(j\ k)$ são parcelas de J_k .

Seja $(m\ k)$ uma parcela de J_k .

1.º caso Quando $m \neq i, j$ tem-se necessariamente que $(i\ j)(m\ k) = (m\ k)(i\ j)$ pois ciclos disjuntos comutam;

2.º caso Quando $m = i$ tem-se que

$$(m\ k)(i\ j) = (i\ k)(i\ j) = (i\ j\ k) = (i\ j)(j\ k);$$

3.º caso Quando $m = j$ tem-se que

$$(m\ k)(i\ j) = (j\ k)(i\ j) = (i\ k\ j) = (i\ j)(i\ k).$$

Prova-se assim que para qualquer transposição $(i\ j)$ de S_{k-1}

$$\begin{aligned} J_k(i\ j) &= [(1\ k) + \dots + (i\ k) + \dots + (j\ k) + \dots + (k-1\ k)](i\ j) \\ &= (1\ k)(i\ j) + \dots + (i\ k)(i\ j) + \dots + (j\ k)(i\ j) + \dots + (k-1\ k)(i\ j) \\ &= (i\ j)(1\ k) + \dots + (i\ j)(j\ k) + \dots + (i\ j)(i\ k) + \dots + (i\ j)(k-1\ k) \\ &= (i\ j)[(1\ k) + \dots + (k-1\ k)] = (i\ j)J_k. \end{aligned}$$

Tendo em conta que qualquer elemento de S_{k-1} se pode escrever como um produto de transposições podemos assumir que para qualquer k

$$\therefore J_k \cdot S_{k-1} = S_{k-1} \cdot J_k.$$

□

Exemplo 14. Consideremos $S_2 = \{(1), (12)\}$ e $J_3 = (13) + (23)$. Temos que

$$\begin{aligned} [(13) + (23)] \cdot (12) &= (13)(12) + (23)(12) = (123) + (132) \\ (12) \cdot [(13) + (23)] &= (12)(13) + (12)(23) = (132) + (123). \\ \therefore S_2 \cdot J_3 &= J_3 \cdot S_2 \end{aligned}$$

Observações: Se J_k comuta com S_{k-1} então necessariamente comuta com $\mathbb{C}S_{k-1}$, facilmente verificável pela forma como a álgebra do grupo é construída.

Corolário 1.2.2. *Os elementos J_k comutam entre si.*

Demonstração. Sejam J_i, J_k dois elementos-JM distintos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i < k$. Temos obrigatoriamente que $J_i \in \mathbb{C}S_{k-1}$ e pela proposição 1.2.1 podemos então concluir que J_i comuta com J_k . □

O **centro** de $\mathbb{C}S_n$ define-se da seguinte forma:

$$Z_n := \{x \in \mathbb{C}S_n : xa = ax, \forall a \in \mathbb{C}S_n\}$$

O **centralizador** de $\mathbb{C}S_n$ em $\mathbb{C}S_{n+m}$ define-se da seguinte forma:

$$Z_{n,m} := \{x \in \mathbb{C}S_{n+m} : xa = ax, \forall a \in \mathbb{C}S_n\}$$

Lema 1.2.3. *Sejam $\sigma, \pi \in S_n$. A aplicação em $[\pi]$ definida por*

$$\pi_i \mapsto \sigma \pi_i \sigma^{-1}$$

é bijetiva.

Proposição 1.2.4. *A álgebra Z_n é gerada pelos elementos*

$$z := \sum_{\pi_i \in [\pi]} \pi_i \in \mathbb{C}S_n$$

*chamados de **soma de classes**, onde $[\pi] \in S_n^\vee$.*

Demonstração. Sejam $\pi \in S_n$ e $z = \sum_{\pi_i \in [\pi]} \pi_i$.
Para qualquer $x = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \in \mathbb{C}S_n$ temos que

$$\begin{aligned} zx &= \left(\sum_{\pi_i \in [\pi]} \pi_i \right) \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right) = \sum_{\substack{\pi_i \in [\pi] \\ \sigma \in S_n}} \alpha_\sigma \pi_i \sigma = \quad (\text{Lema 1.2.3}) \\ &= \sum_{\substack{\pi_i \in [\pi] \\ \sigma \in S_n}} \alpha_\sigma \sigma \pi_i \sigma^{-1} \sigma = \sum_{\substack{\pi_i \in [\pi] \\ \sigma \in S_n}} \alpha_\sigma \sigma \pi_i = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\pi_i \in [\pi]} \pi_i \right) = xz \\ &\quad \therefore z \in Z_n. \end{aligned}$$

Além disso, se $c = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \in Z_n$, para qualquer $\pi \in S_n$ temos que

$$\begin{aligned} \pi c = c\pi &\iff \pi c \pi^{-1} = c \iff \pi \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right) \pi^{-1} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \\ &\iff \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \pi \sigma \pi^{-1} = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \end{aligned}$$

\therefore Em qualquer elemento do centro de S_n , os coeficientes de permutações conjugadas são necessariamente iguais. \square

Observações:

- O elemento-JM $J_{n+1} \in Z_{n,m}$ é a soma de todos os elementos da classe associada ao modelo de ciclos com marcas $\{n+1, \dots, n+m\}$

$$(\xrightarrow{1} n+1);$$

- Iremos utilizar o símbolo \rightsquigarrow para indicar que um determinado elemento de $\mathbb{C}S_n$ provém da soma de todos os elementos de uma determinada classe de conjugação, identificada pelo modelo de ciclos correspondente. Em particular,

$$J_{n+1} \rightsquigarrow (\xrightarrow{1} n+1).$$

Proposição 1.2.5. *A álgebra $Z_{n,m}$ é gerada pelas somas de classes de conjugação- S_n em S_{n+m} .*

Demonstração. Análogo ao que foi feito na demonstração da proposição 1.2.4, recorrendo à proposição 1.1.7. \square

Observações: O exemplo seguinte mostra-nos o caso particular de um elemento do centralizador $Z_{n,m}$ em que é possível escrevê-lo como a diferença entre um produto de elementos de $\langle S'_{m,n+m}, Z_n, J_{n+1}, \dots, J_{n+m} \rangle$ e um elemento de $\mathbb{C}S_{n+m}$ que se escreve como combinação linear das permutações que fixam pelo menos mais um elemento que as permutações associadas ao elemento do centralizador.

No teorema seguinte generalizamos esse resultado.

Exemplo 15. Seja $z \in Z_{11,5} \subseteq \mathbb{C}S_{16}$ tal que z corresponde à soma dos elementos da classe de conjugação- S_{11} correspondentes ao modelo de ciclo com marcas $\{12, 13, 14, 15, 16\}$ que se segue

$$z \rightsquigarrow (12 * * 13)(14 * 16 15)(* * * *)(* *)(* *) = (12 \xrightarrow{2} 13)(14 \xrightarrow{1} 16 15)(\xrightarrow{4})(\xrightarrow{2})(\xrightarrow{2}).$$

Consideremos agora os seguintes elementos de $\mathbb{C}S_{16}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= (12 13)J_{12}J_{12} \\ x_2 &= (14 16)[J_{14} - (12 14) - (13 14)](16 15) \rightsquigarrow (14 16)(\xrightarrow{1} 14)(16 15) = (14 \xrightarrow{1} 16 15) \\ c &\rightsquigarrow (\xrightarrow{4})(\xrightarrow{2})(\xrightarrow{2}) \end{aligned}$$

Claramente x_1 e x_2 pertencem à álgebra gerada por $S'_{5,16}$ e por J_{12}, \dots, J_{16} e c pertence à álgebra gerada por Z_{11} .

Na soma de elementos de $\mathbb{C}S_{16}$ obtida pelo produto x_1x_2c obtemos todas as parcelas do elemento z e as restantes parcelas irão corresponder a permutações que fixam pelo menos mais um elemento que as permutações associadas a z pois provêm do produto de ciclos onde os “lugares vagos” foram ocupados por números que se repetem fazendo com que algum número inferior a 12 não surja nesse produto sendo por isso fixado nessa permutação.

Podemos então concluir que

$$x_1x_2c - r = z$$

para um certo $r \in \mathbb{C}S_{16}$ que se escreve como combinação linear de permutações que fixam pelo menos mais um elemento que as permutações associadas a z .

Notação: Um modelo de ciclos com marcas $\{n+1, \dots, n+m\}$ de S_{n+m} onde há exatamente i elementos que mudam de posição através das permutações associadas irá ser representado por $(\)_{n,m}^i$.

Definimos um filtro em $Z_{n,m}$ onde, para todo o $i \leq n+m$

$$Z_{n,m}^i := \langle z \in Z_{n,m} : z \rightsquigarrow ()_{n,m}^j, \forall j \leq i \rangle$$

corresponde ao i -ésimo subespaço deste filtro.

Observações:

- Numa permutação associada a $()_{n,m}^i$, $n-i$ elementos são fixos;
- O filtro definido gera uma cadeia de subálgebras de $Z_{n,m}$

$$Z_{n,m}^1 \subset Z_{n,m}^2 \subset \dots \subset Z_{n,m}^{n+m}.$$

Teorema 1.2.6. *A álgebra $Z_{n,m}$ é gerada por $S'_{m,n+m}$, Z_n e por J_{n+1}, \dots, J_{n+m} .*

Demonstração. Temos que:

[1] Seja $x \in Z_n$. Então $x \in \mathbb{C}S_n \subset \mathbb{C}S_{n+m}$ e $\forall a \in \mathbb{C}S_n$, $xa = ax$.

$$\therefore Z_n \subseteq Z_{n,m}.$$

[2] Se considerarmos $G'_m = \{n+1, \dots, n+m\}$ temos que $[n] \cap G'_m = \emptyset$ o que faz com que $\forall x \in S'_{m,n+m}$, $\forall a \in \mathbb{C}S_n$, $xa = ax$.

$$\therefore S'_{m,n+m} \subseteq Z_{n,m}.$$

[3] Pelas proposições 1.1.1 e 1.2.1 temos que $\forall k \geq 1$, $J_{n+k}a = aJ_{n+k}$, $\forall a \in \mathbb{C}S_n$.

$$\therefore J_{n+1}, J_{n+2}, \dots, J_{n+m} \in Z_{n,m}.$$

Por [1], [2] e [3]

$$\therefore Z_n, S'_{m,n+m}, \{J_{n+1}, \dots, J_{n+m}\} \subseteq Z_{n,m}.$$

Reciprocamente, consideremos a álgebra \mathcal{A} gerada por Z_n, S'_m e $\{J_{n+1}, \dots, J_{n+m}\}$. Consideremos ainda os seguintes elementos de $Z_{n,m}$

$$C_k = (\rightharpoonup^k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$J_i^* = \begin{cases} J_i & \text{se } i \leq n+1, \\ J_i - \sum_{n+1 \leq j \leq i-1} (j \ i) & \text{se } i > n+1. \end{cases}$$

Provemos por indução em $i \leq n+m$ que $Z_{n,m}^i \subseteq \mathcal{A}$.

– Se $i = 1$ temos que $Z_{n,m}^1 = \mathbb{C} \cdot (1) \subseteq \mathcal{A}$.

– Suponhamos agora, por hipótese de indução, que $Z_{n,m}^{i-1} \subseteq \mathcal{A}$.

Seja $z \in Z_{n,m}^i$ tal que $z \notin Z_{n,m}^{i-1}$. Podemos então admitir que z irá corresponder à soma dos elementos de uma classe de conjugação- S_n em S_{n+m} que poderá ser representada da seguinte forma:

$$z \rightsquigarrow (a_1 \xrightarrow{b_1} a_2 \xrightarrow{b_2} \dots \xrightarrow{b_{m-1}} a_m \xrightarrow{b_m}) C_{k_1} \dots C_{k_l}$$

onde

- $a_i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ e $a_i \neq a_j$ sempre que $i \neq j$;
- $b_i \in \{0; 0, 5; 1; 1, 5; \dots; n; n+0, 5\}$ e se $b_i \notin \mathbb{Z}$ significa que existem $i-0, 5$ lugares vagos nessa sequência e uma quebra de ciclos a seguir;
- $\sum_{i \leq m} [b_i] + \sum_{j \leq l} k_j = n$, onde $[b_i]$ corresponde à parte inteira de b_i .

Consideremos

$$X := \{b_j \in \bigcup_{i \leq m} b_i : b_j \notin \mathbb{Z}\},$$

$$c \rightsquigarrow C_{k_1} \dots C_{k_l}.$$

1.º caso Se $X = \emptyset$ consideremos

$$x = (a_1 a_2) J_{a_1}^* b_1 (a_2 a_3) J_{a_2}^* b_2 \dots (a_{m-1} a_m) J_{a_{m-1}}^* b_{m-1} J_{a_m}^* b_m.$$

Existe necessariamente $r \in Z_{n,m}^{i-1}$ tal que $xc - r = z$ pois no produto xc surgem todas as parcelas de z e as restantes estão associadas a permutações que fixam pelo menos mais um elemento que as permutações associadas a z pois são provenientes do produto de ciclos onde existem repetições na ocupação dos “lugares vagos”, fazendo com que certos elementos de $[n]$ não apareçam nesse produto de ciclos e por isso fixados.

Como $x, c, r \in \mathcal{A}$ concluímos que $z \in \mathcal{A}$.

2.º caso Se $X \neq \emptyset$ seja b_k o menor dos $b_j \in X$ e consideremos

$$x_k = (a_1 a_2) J_{a_1}^* b_1 (a_2 a_3) J_{a_2}^* b_2 \dots (a_{k-1} a_k) J_{a_{k-1}}^* b_{k-1} J_{a_k}^* [b_k]. \quad (1.4)$$

Agora, se considerarmos a_k como a_1 em (1.4), podemos construir um novo elemento com estrutura semelhante a x_k mas associado ao próximo elemento de X e assim sucessivamente, obtendo para cada $b_j \in X$ um elemento x_j com estrutura semelhante a (1.4).

Além disso, sabemos que terá de existir $r \in Z_{n,m}^{i-1}$ tal que

$$\prod_j x_j c - r = z.$$

Como $x_j, c, r \in \mathcal{A}$ concluímos que $z \in \mathcal{A}$.

$$\therefore Z_{n,m} \subseteq \mathcal{A}.$$

□

1.3 Representações e Módulos

Nesta secção apresentamos conceitos e propriedades relacionados com representações, focando-nos essencialmente no caso complexo de grupos simétricos e, tendo em conta que uma representação- S_n pode ser vista como um módulo- $\mathbb{C}S_n$, apresentamos também algumas noções e resultados relacionados com estas estruturas algébricas.

Estudamos o caso particular das representações irredutíveis de S_1, S_2 e S_3 e terminamos com três resultados chave e corolários respetivos que nos irão orientar no capítulo seguinte: Teorema de Masche, Lema de Schur e Teorema de Wedderburn-Artin.

Assumimos o conhecimento prévio dos seguintes conceitos: sinal de uma permutação, aplicação linear, valor próprio, polinómio característico, subespaço, soma direta, anel de matrizes, anel de divisão, ideal minimal, idempotente, teorema fundamental da álgebra.

Salvo indicação em contrário, G corresponderá sempre a um grupo finito.

Notação:

- Iremos representar o conjunto de todas as aplicações \mathbb{C} -lineares bijetivas $V \rightarrow V$ por $GL(V)$;
- Indicaremos o sinal de uma permutação σ por $\epsilon(\sigma)$.

Proposição 1.3.1. *A estrutura algébrica $(GL(V), \circ)$, onde a operação binária \circ representa a composição de aplicações, é um grupo.*

Uma aplicação

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

diz-se uma **representação** de G sobre V se for um homomorfismo de grupos, i.e., se

$$\forall g, h \in G \text{ e } \forall v \in V, \quad \rho(hg)(v) = \rho(h)(\rho(g)(v)).$$

Observações: Os próximos dois resultados irão desempenhar um papel relevante na demonstração das proposições 1.3.6 e 1.3.7 e por isso são desde já apresentados.

Proposição 1.3.2. *Sejam ρ uma representação complexa de G e $g \in G$.*

Tem-se que:

- [1] *Qualquer elemento $\rho(g)$ tem pelo menos um vetor próprio;*
- [2] *Se a ordem de g for k então os valores próprios α de $\rho(g)$ satisfazem $\alpha^k = 1$.*

Demonstração.

- [1] Tendo em conta que $\rho(g)$ é um homomorfismo num espaço vetorial complexo sabemos que o seu polinómio característico tem de ter uma raiz;

[2] Suponhamos que $g^k = e_G$.

Se v é vetor próprio de $\rho(g)$ associado ao valor próprio α então

$$v = \rho(e_G)(v) = \rho(g^k)(v) = (\rho(g))^k(v) = \alpha^k v.$$

Tendo em conta que $v \neq 0$, por ser um vetor próprio,

$$\therefore \alpha^k = 1.$$

□

Proposição 1.3.3. *Consideremos V espaço vetorial complexo e as aplicações lineares*

$$f, g : V \rightarrow V.$$

Se $fg = gf$ então f e g têm um vetor próprio em comum.

Demonstração. Seja α um valor próprio de f e V_α o espaço próprio correspondente.

Se $v \in V_\alpha$ então

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\alpha v) = \alpha g(v),$$

isto é, $g(v) \in V_\alpha$.

Assim $g(V_\alpha) \subseteq V_\alpha$ e, atendendo ao ponto [1] da proposição 1.3.2, $g|_{V_\alpha}$ tem de ter um vetor próprio que também é vetor próprio de f . □

Proposição 1.3.4. *Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{C} e $\rho : S_n \rightarrow GL(V)$ uma representação de S_n sobre \mathbb{C} . Então ρ induz uma representação única,*

$$\bar{\rho} : \mathbb{C}S_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V),$$

tal que $\bar{\rho}|_{S_n} = \rho$.

Sejam \mathbb{K} um corpo, \mathcal{A} uma álgebra- \mathbb{K} e V um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Dizemos que V é **módulo- \mathcal{A}** (à esquerda) se está definido um produto $av \in \mathcal{A}$ sempre que $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$ tal que:

- [1] $a(v + u) = av + au \quad \forall a \in \mathcal{A} \text{ e } \forall u, v \in V$;
- [2] $(a + b)v = av + bv \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \text{ e } \forall v \in V$;
- [3] $(ab)v = a(bv) \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \text{ e } \forall v \in V$;
- [4] $1v = v \quad \forall v \in V$, onde 1 é a identidade de \mathcal{A} ;
- [5] $a(\lambda v) = \lambda(av) \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$.

Proposição 1.3.5. *Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita.*

- [1] *Se ρ é uma representação de S_n sobre V , então V é um módulo- $\mathbb{C}S_n$ com respeito ao produto*

$$\sigma v := \rho(\sigma)(v);$$

- [2] *Se V for um módulo- $\mathbb{C}S_n$ com produto σv , então a aplicação $\rho(\sigma) : v \rightarrow \sigma v$ pertence a $GL(V)$ e*

$$\begin{array}{ccc} \rho : & S_n & \longrightarrow GL(S_n) \\ & \sigma & \longmapsto \rho(\sigma) \end{array}$$

é uma representação de S_n sobre V , para todo o $\sigma \in S_n$ e para todo o $v \in V$.

Observações:

- Diz-se que uma representação de S_n dá a V uma estrutura de módulo- $\mathbb{C}S_n$;
- Muitas vezes referir-nos-emos a V quando na verdade pretendemos referir-nos à representação de S_n em V ;
- A dimensão de V é por vezes referida como o *grau* da representação.

Dois módulos V e W sobre \mathcal{A} dizem-se **isomorfos** se existir uma aplicação bijetiva $f : V \rightarrow W$ tal que para todo o $a \in \mathcal{A}$ e para todo o $u, v \in V$ verifica

$$[1] \quad f(u + v) = f(u) + f(v);$$

$$[2] \quad f(av) = af(v).$$

Duas representações dizem-se **equivalentes** se os seus módulos correspondentes são isomorfos.

Notação:

- Iremos representar a classe de equivalência de uma representação ρ por $[\rho]$;
- Se ρ é uma representação de S_n , iremos representar por V^ρ o módulo- $\mathbb{C}S_n$ correspondente.

Sejam \mathbb{K} um corpo, G um grupo e V, W módulos- $\mathbb{K}G$. Sejam ρ_V, ρ_W as representações de G proporcionadas por V, W respetivamente.

- [1] Um **submódulo**- $\mathbb{K}G$ de V é um subespaço $U \leq_K V$, tal que

$$xu \in U, \quad \forall x \in \mathbb{K}G, \forall u \in U.$$

Nesse caso escrevemos

$$U \leq_{\mathbb{K}G} V.$$

- [2] Dizemos que V é um módulo- $\mathbb{K}G$ **irredutível** se $V \neq (0)$ e se os únicos submódulos- $\mathbb{K}G$ de V são (0) e V .
- [3] Dizemos que ρ é uma **representação irredutível** de G se V é um módulo- $\mathbb{K}G$ irredutível.

Observações: Duas representações irredutíveis de S_1 são necessariamente equivalentes e de grau 1.

Notação:

- Salvo indicação em contrário, iremos representar a representação irredutível de S_1 por ρ_1 .
- Iremos denotar por S_n^\wedge o conjunto de todas as classes de equivalência de representações irredutíveis de S_n ;
- No futuro, para simplificação de notação, para uma dada representação ρ em vez de $\rho(g)(v)$ iremos escrever $g \cdot v$ ou mesmo gv .

Exemplo 16. Consideremos $\rho_2, \rho_3 : S_2 \rightarrow GL(\mathbb{C})$, representações de S_2 tais que para todo o $\sigma \in S_2$ e para todo o $x \in \mathbb{C}$

$$\rho_2(\sigma)(x) = x \quad \text{e} \quad \rho_3(\sigma)(x) = \varepsilon(\sigma)x.$$

As representações ρ_2 e ρ_3 são necessariamente irredutíveis, porque têm grau 1, mas não são equivalentes.

Proposição 1.3.6. *Qualquer representação irredutível de S_2 é equivalente a ρ_2 ou ρ_3 .*

Demonstração. Seja V um módulo- S_2 irredutível.

Tendo em conta que $S_2 = \{(1), (1\ 2)\}$ e que $(1)v = v$, $\forall v \in V$, a ação de $(1\ 2)$ vai determinar univocamente a representação.

Como o elemento $(1\ 2)$ tem de ter um vetor próprio em V ficamos a saber que a representação tem dimensão 1.

Como $(1\ 2)^2 = 1$ o valor próprio λ , associado a $(1\ 2)$, tem de verificar a condição $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$.

- $\lambda = 1 \Rightarrow (1\ 2)u = u \Rightarrow$ a representação de V é equivalente a ρ_2 ;
- $\lambda = -1 \Rightarrow (1\ 2)u = -u \Rightarrow$ a representação de V é equivalente a ρ_3 .

□

Exemplo 17. Consideremos $\rho_4, \rho_6 : S_3 \rightarrow GL(\mathbb{C})$ e $\rho_5 : S_3 \rightarrow GL(V)$, representações de S_3 , onde $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e, para todo o $\sigma \in S_3$, temos que

$$\rho_4(\sigma)(x) = x, \quad \rho_6(\sigma)(x) = \varepsilon(\sigma)x, \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

$$\rho_5(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3.$$

As representações ρ_4 e ρ_6 são necessariamente irredutíveis porque têm grau 1.

Quanto à representação ρ_5 , tendo em conta que $(1, 1, -2) \in V$, podemos observar que

$$\rho_5(1\ 2)(1, 1, -2) = (1, 1, -2), \quad \rho_5(2\ 3)(1, 1, -2) = (1, -2, 1) \quad \text{e}$$

$$\rho_5(1\ 2)(1, -2, 1) = (-2, 1, 1) = -(1, 1, -2) - (1, -2, 1)$$

o que nos diz que é uma representação irredutível (de grau 2).

Proposição 1.3.7. *Seja ρ uma representação irredutível de S_3 . Então ρ é equivalente a ρ_4 , a ρ_5 ou a ρ_6 .*

Demonstração. Seja V um módulo- S_3 irredutível.

Pelo ponto [2] da proposição 1.1.3 sabemos que $\{(1\ 2), (2\ 3)\}$ gera S_3 .

Consideremos $J_3 = (13) + (23)$. Observemos que

$$(1\ 2)[(1\ 3) + (2\ 3)] = (1\ 3\ 2) + (1\ 2\ 3) = [(1\ 3) + (2\ 3)](1\ 2).$$

Ao comutarem, $(1\ 2)$ e $(1\ 3) + (2\ 3)$ têm pelo menos um vetor próprio em comum e por isso sabemos que

$$\exists u \in V \setminus \{0\} : (1\ 2)u = \lambda u, \quad [(1\ 3) + (2\ 3)]u = \mu u, \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Mas

$$u = (1\ 2)(1\ 2)u = \lambda^2 u \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Por motivos análogos, sabemos que

$$\exists v \in V \setminus \{0\} : (2\ 3)v = \pm v.$$

1.º caso Suponhamos que u também é vetor próprio de $(2\ 3)$ e por isso $(2\ 3)u = \pm u$.

Neste caso V terá dimensão 1 pois admitimos que se trata de uma representação irredutível de S_3 .

Suponhamos, com vista a um absurdo, que os valores próprios associados a u de $(1\ 2)$ e $(2\ 3)$ são simétricos. Por um lado, usando apenas a propriedade distributiva, temos

$$[(1\ 3) + (2\ 3)]u = (1\ 3)u + (2\ 3)u = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)u + (2\ 3)u = \pm 2u, \quad (1.5)$$

por outro, utilizando o facto de

$$[(1\ 3) + (2\ 3)](2\ 3) = (1\ 3)(2\ 3) + (2\ 3)(2\ 3) = (2\ 3)(1\ 2) + 1$$

dá-nos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} [(1\ 3) + (2\ 3)](2\ 3)u &= [(1\ 3)(2\ 3) + (2\ 3)(2\ 3)]u = [(2\ 3)(1\ 2) + 1]u \\ &= (2\ 3)(1\ 2)u + u = 0 \Rightarrow [(1\ 3) + (2\ 3)]u = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por (1.5) e (1.6) temos que $\pm 2u = 0$ o que é absurdo pois $u \neq 0$.

$$\therefore (1\ 2)u = (2\ 3)u = u \quad \vee \quad (1\ 2)u = (2\ 3)u = -u.$$

Obtemos assim representações equivalentes a ρ_4 e ρ_6 do exemplo anterior.

2.º caso Suponhamos que u não é vetor próprio de $(2\ 3)$. Então $\{u, (2\ 3)u\}$ é um sistema de vetores linearmente independentes de V .

Consideremos $W = \langle u, (2\ 3)u \rangle$ subespaço de V de dimensão 2.

Pela proposição 1.3.4 sabemos que podemos encarar V como representação irredutível de $\mathbb{C}S_3$. Observemos que

$$(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2) = (1\ 3)(2\ 3) + (2\ 3)(2\ 3) - 1 = [(1\ 3) + (2\ 3)](2\ 3) - 1.$$

Então

$$\begin{aligned} (1\ 2) \cdot u &= u, \\ (1\ 2) \cdot (2\ 3)u &= (2\ 3)(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)u \\ &= (2\ 3) [(1\ 3) + (2\ 3)](2\ 3) - 1 (2\ 3)u \\ &= (2\ 3) [(1\ 3) + (2\ 3)](2\ 3)(2\ 3)u - (2\ 3)(2\ 3)u \\ &= (2\ 3) [(1\ 3) + (2\ 3)]u - u \\ &= \mu(2\ 3)u - u, \\ (2\ 3) \cdot u &= (2\ 3)u, \\ (2\ 3) \cdot (2\ 3)u &= u. \end{aligned}$$

$$\therefore W = V.$$

Além disso, neste caso temos que

$$\begin{aligned} (2\ 3)u &= (1\ 2)(1\ 2)[(2\ 3)u] = (1\ 2)[\mu(2\ 3)u - u] \\ &= \mu[(1\ 2)(2\ 3)u] - (1\ 2)u \\ &= \mu[\mu(2\ 3)u - u] - u \\ &= \mu^2(2\ 3)u - \mu u - u \\ &= \mu^2(2\ 3)u + (-1 - \mu)u, \end{aligned}$$

e como $\{u, (2\ 3)u\}$ é base podemos concluir que $(-1 - \mu)u = 0$ ou seja

$$\therefore \mu = -1$$

e, sendo assim, temos uma representação equivalente a ρ_5 do exemplo 17. \square

Observações: No final deste trabalho iremos ver que para qualquer S_n existem representações semelhantes às do exemplo 17 e por isso estas representações são identificadas por **representação trivial** (ρ_4), **representação sinal** (ρ_6) e **representação standard** (ρ_5).

Teorema (Maschke). *Sejam G um grupo finito e \mathbb{K} um corpo tal que*

$$\text{car}(\mathbb{K}) = 0 \text{ ou } \text{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P} \text{ mas } p \nmid |G|.$$

Se (V, ρ) é uma representação de grau finito de G sobre \mathbb{K} e se W é um subespaço $\mathbb{K}G$ -invariante de V então existe U subespaço $\mathbb{K}G$ -invariante de V tal que

$$V = W \oplus U$$

Corolário 1.3.8. *Sejam V módulo- $\mathbb{C}S_n$ tal que $V \neq (0)$ e de dimensão finita. Sabemos que existem W_1, \dots, W_t submódulos- $\mathbb{C}S_n$ de V irredutíveis tais que*

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$$

ou seja, todo o módulo- $\mathbb{C}S_n$ é uma soma direta de módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis.

Exemplo 18. Consideremos $V = \mathbb{C}^3$ módulo- $\mathbb{C}S_3$ onde

$$\sigma x = x, \quad \forall \sigma \in S_3 \text{ e } x \in V.$$

Necessariamente V não é irredutível pois tem dimensão 3. Mas claramente

$$V = \langle (1, 0, 0) \rangle \oplus \langle (0, 1, 0) \rangle \oplus \langle (0, 0, 1) \rangle$$

estando os três módulos associados a representações equivalentes a ρ_4 .

Teorema (Lema de Schur). *Sejam \mathbb{K} um corpo, \mathcal{A} um álgebra- \mathbb{K} e V, W módulos- \mathcal{A} irredutíveis.*

[1] *Se*

$$\varphi : V \rightarrow W$$

é um homomorfismo de módulos- \mathcal{A} então $\varphi = 0$ ou φ é um isomorfismo;

[2] *$\text{End}_{\mathcal{A}}(V)$ é álgebra de divisão;*

[3] *Se \mathbb{K} for algebricamente fechado então $\text{End}_{\mathcal{A}}(V) = \mathbb{K} \cdot I_V$.*

Corolário 1.3.9. *Se V é um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível então*

$$\text{End}_{\mathbb{C}S_n}(V) \cong \mathbb{C}.$$

Exemplo 19. Voltando a pegar no exemplo 17, sejam

$$u = (1, 1, -2) \quad \text{e} \quad v = (1, -2, 1).$$

Temos que as ações dos elementos $(1\ 2)$ e $(2\ 3)$ em V^{ρ_5} podem ser representadas matricialmente por

$$\mathcal{M}_{\{u,v\}}(1\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\{u,v\}}(2\ 3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a representação matricial de um endomorfismo de V , sobre a base $\{u, v\}$, que respeita a ação de $\mathbb{C}S_3$. Temos que

$$[1] \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

$$[2] \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Então, por [2], temos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

ou seja, $a = d$ e $b = c$. Por [1] temos que

$$\begin{bmatrix} a & -b-a \\ b & -b-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & b-a \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

ou seja, $b = 0$. Sendo assim, a representação matricial do endomorfismo de V resume-se a

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{com } a \in \mathbb{C}$$

e por isso podemos concluir que

$$\therefore \text{End}_{\mathbb{C}S_3}(V) \cong \mathbb{C}.$$

Teorema (Wedderburn-Artin). *Para qualquer anel $R \neq \{0\}$ existe um número finito r de anéis de matrizes n_i por n_i sobre anéis de divisão D_i para certos inteiros n_i , $1 \leq i \leq r$, determinados de forma única a menos de permutação do índice i , tais que*

$$R \cong D_1^{n_1 \times n_1} \times \dots \times D_r^{n_r \times n_r}.$$

Corolário 1.3.10.

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \in S_n^\wedge} \text{End}_{\mathbb{C}}(V^\lambda).$$

Exemplo 20. Voltando ao exemplo 17, consideremos agora o produto cartesiano

$$W = V^{\rho_4} \times V^{\rho_5} \times V^{\rho_6}.$$

Seja $u_1 \neq 0$ um vetor de V^{ρ_4} , $u_2 = (1, 1 - 2)$, $u_3 = (1, -2, 1)$ e $u_4 \neq 0$ um vetor de V^{ρ_6} . Temos que $\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é uma base de W e, matricialmente, os elementos de S_3 atuam em W da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\beta(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_\beta(1\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_\beta(1\ 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{M}_\beta(2\ 3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_\beta(1\ 2\ 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_\beta(1\ 3\ 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O conjunto de todas as 6 matrizes anteriores é linearmente independente e se considerarmos o conjunto de todas as combinações lineares dessas mesmas matrizes obtemos um espaço complexo de dimensão 6 isomorfo a $\mathbb{C}S_3$.

$$\therefore \mathbb{C}S_3 \cong \left\{ \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} : * \in \mathbb{C} \right\}.$$

Lema 1.3.11. ⁵ Se V é módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível e W módulo- $\mathbb{C}S_{n-1}$ irredutível então

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}S_{n-1}}(W, V|_{\mathbb{C}S_{n-1}})$$

é módulo- $Z_{n-1,1}$ irredutível.

Lema 1.3.12. Todo o módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível é isomorfo a um ideal minimal $\mathbb{C}S_n \cdot e$, onde e é um idempotente de $\mathbb{C}S_n$.

Exemplo 21. Voltando ao caso da representação ρ_5 do exemplo 17, consideremos

$$a := 1 - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2).$$

Temos que

$$\begin{aligned} a^2 &= [(1) - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2)][(1) - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2)] = \\ &= (1) - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2) - (1\ 3) + (1) - (1\ 2\ 3) + (2\ 3) + (1\ 2) \\ &\quad - (1\ 3\ 2) + (1) - (1\ 3) - (1\ 3\ 2) + (1\ 2) - (2\ 3) + (1\ 2\ 3) = \\ &= 3[(1) - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2)] = 3a, \end{aligned}$$

⁵A demonstração deste lema poderá ser consultada em [Kl].

ou seja, se considerarmos $e = \frac{1}{3}[(1) - (1\ 3) + (1\ 2) - (1\ 3\ 2)]$ temos que e é um idempotente de $\mathbb{C}S_3$. Além disso, se ainda considerarmos

$$b := (1\ 2) - (1\ 3\ 2) + (1\ 2\ 3) - (2\ 3)$$

nitidamente a e b são linearmente independentes e temos que

$$\begin{array}{lll} (1)a = a & (12)a = -a & (13)a = -a + b \\ (23)a = -b & (123)a = -a + b & (132)a = -b \end{array}$$

ou seja, o ideal $\mathbb{C} \cdot e$ tem dimensão 2 e podemos representar matricialmente as ações de $(1\ 2)$ e $(2\ 3)$ segundo a base $\{a, b\}$ por

$$\mathcal{M}_{\{a,b\}}(1\ 2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\{a,b\}}(2\ 3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore V^{\rho^5} \cong \mathbb{C}S_3 \cdot e.$$

Capítulo 2

Grafo da Ramificação

Neste capítulo apresentamos o *grafo da ramificação*¹ \mathbb{B} cujos vértices são as classes de equivalência das representações irredutíveis de S_n e começamos logo por provar que não existem arestas múltiplas neste grafo.

De seguida passamos para um estudo pormenorizado dos caminhos em \mathbb{B} utilizando para isso os conceitos chave de *base de Gelfand-Zetlin* e *álgebra de Gelfand-Zetlin* que assumem um papel preponderante na abordagem feita neste trabalho à Teoria da Representação do Grupo Simétrico.

Serviram de referência para este capítulo, Okounkov & Vershik [OV], Kleshchev [Kl] e Rodriguez-Villegas [RV].

2.1 Vértices e Arestas

Nesta secção começamos por perceber quais são os vértices do grafo da ramificação e, através da regra da ramificação, como se constroem as arestas em \mathbb{B} , tendo presente o teorema de Maschke que nos diz que toda a representação se decompõe numa soma direta de representações irredutíveis.

Assumimos o conhecimento prévio dos seguintes conceitos: grafo, vértice, aresta, caminho.

O **Grafo da Ramificação** \mathbb{B} é um grafo indexável, infinito, com um nível para cada número natural n , construído da seguinte forma:

- os vértices no nível n são as classes de equivalência das representações irredutíveis de S_n ;
- existe uma aresta a unir $[\rho]$, classe de equivalência de representações irredutíveis de S_n , com $[\tau]$, classe de equivalência de representações irredutíveis de S_{n-1} , se na restrição de ρ a S_{n-1} encontramos, na sua decomposição em representações irredutíveis, uma representação de S_{n-1} irredutível, equivalente a τ .

¹Tradução de *branching graph*, designação utilizada em [OV] e em [Kl].

Notação:

- Ao conjunto S_n^\wedge chamamos de n -ésimo nível do grafo da ramificação;
- Escrevemos

$$[\tau] \nearrow [\rho]$$

se $[\tau]$ e $[\rho]$ estão ligados por uma aresta no grafo da ramificação, com $[\tau] \in S_{n-1}^\wedge$ e $[\rho] \in S_n^\wedge$;

- Escrevemos

$$[\tau] \hookrightarrow [\rho]$$

quando existe um caminho de $[\tau]$ para $[\rho]$ em \mathbb{B} , com $[\tau] \in S_k^\wedge$ e $[\rho] \in S_n^\wedge$, onde $k \leq n$.

Exemplo 22. Pelo que foi visto na última secção do capítulo anterior, sabemos que os três primeiros níveis do grafo da ramificação terão exatamente os seguintes vértices

$$\begin{aligned} S_1^\wedge &\longrightarrow [\rho_1] \\ S_2^\wedge &\longrightarrow [\rho_2] \quad [\rho_3] \\ S_3^\wedge &\longrightarrow [\rho_4] \quad [\rho_5] \quad [\rho_6] \end{aligned}$$

Observações:

- Os vértices do grafo da ramificação são os elementos do conjunto

$$\bigcup_{n \geq 0} S_n^\wedge;$$

- Para provarmos que não existem arestas múltiplas no grafo \mathbb{B} precisamos da noção de módulo *livre de multiplicidade*² e de um caso particular da *regra da ramificação*³ que descreve a restrição de um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível a S_{n-1} e cujo resultado geral poderá ser consultado em [FH].

Sendo V um módulo- $\mathbb{C}S_n$ este diz-se **livre de multiplicidade** se quaisquer dois submódulos irredutíveis que surjam na decomposição direta de V são não isomorfos.

Teorema 2.1.1. *Seja V um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível. A restrição $V|_{S_{n-1}}$ é livre de multiplicidade.*

²Tradução de *multiplicity free*, designação utilizada em [OV] e em [KL].

³Tradução de *branching rule*, designação utilizada em [OV] e em [KL]. Em [FH] é usado o termo *branching theorem*.

Demonstração. Seja V uma representação- S_n irredutível e W uma representação- S_{n-1} irredutível, componente de $V|_{S_{n-1}}$.

Pelo lema 1.3.11 sabemos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}S_{n-1}}(W, V|_{\mathbb{C}S_{n-1}})$$

é módulo- $Z_{n-1,1}$ irredutível.

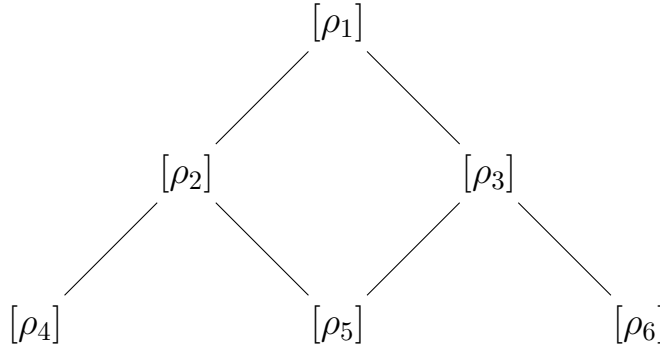
Pelo teorema 1.2.6 sabemos que $Z_{n-1,1}$ é comutativo, pois é o caso particular em que $m = 1$ e na proposição 1.2.1 provámos que J_n comuta com todo o S_{n-1} , em particular, com Z_{n-1} .

Mas um módulo irredutível sobre um anel comutativo tem obrigatoriamente dimensão 1. Esta dimensão dá-nos a multiplicidade de W em V . \square

Exemplo 23. Atendendo ao teorema 2.1.1, facilmente percebemos que

$$\rho_2|_{S_1} = \rho_1, \rho_3|_{S_1} = \rho_1, \rho_4|_{S_2} = \rho_2, \rho_5|_{S_2} = \rho_2 \oplus \rho_3 \text{ e } \rho_6|_{S_2} = \rho_3$$

por isso o grafo da ramificação \mathbb{B} assume o seguinte aspeto



2.2 Descrição dos caminhos

Tendo em conta que o nosso principal objetivo passa por encontrarmos uma descrição puramente combinatória do grafo da ramificação temos de entrar num estudo mais profundo dos caminhos neste grafo. Para isso, para cada vértice de \mathbb{B} , pensamos na sua restrição a S_1 cujas componentes irredutíveis estarão relacionadas com caminhos distintos do único vértice do primeiro nível de \mathbb{B} até ao vértice em questão.

Assumimos o conhecimento prévio do seguinte conceito: produto interno.

Observações:

- Consideremos (\cdot, \cdot) produto interno S_n -invariante em V , isto é,

$$(\sigma v, \sigma w) = (v, w), \quad \forall \sigma \in S_n \text{ e } \forall v, w \in V.$$

Este produto interno é único a menos do produto por um escalar;

- Consideremos V^ρ onde $[\rho] \in S_n^\wedge$, ou seja, V^ρ é um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível. Tendo em conta o teorema 2.1.1 e sabendo que todos os submódulos que aparecem na decomposição são não isomorfos, a decomposição o que implica que a decomposição

$$V^\rho|_{S_{n-1}} = \bigoplus_{\tau \nearrow \rho} V^\tau, \quad \tau \in S_{n-1}^\wedge,$$

onde as arestas referidas dizem respeito ao grafo da ramificação \mathbb{B} , não é apenas única a menos de isomorfismo, mas é mesmo única: os módulos que são parcelas diretas estão bem definidos;

- Decompondo cada V^τ em restrições a S_{n-2} e continuando indutivamente até S_1 , obtemos a decomposição canónica

$$V^\rho|_{S_1} = \bigoplus_T V^T \quad (2.1)$$

em módulos- $\mathbb{C}S_1$ irredutíveis, ou seja, em subespaços V^T de dimensão 1, onde T percorre todos os caminhos

$$T : [\rho_1] \nearrow \dots \nearrow [\rho_n] = [\rho] \quad \text{em } \mathbb{B}, \text{ com } [\rho_k] \in S_k^\wedge.$$

Lema 2.2.1. *Consideremos*

$$T : [\rho_1] \nearrow \dots \nearrow [\rho_n]$$

caminho em \mathbb{B} , onde cada $[\rho_k] \in S_k^\wedge$. Para todo o $k \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\mathbb{C}S_k \cdot V^T \cong V^{\rho_k}.$$

Observações: Isto acontece porque V^T está contido num módulo- $\mathbb{C}S_k$ irredutível isomorfo a V^{ρ_k} .

Exemplo 24. Pegando no exemplo 23, consideremos $V = V^{\rho_5}$, módulo- $\mathbb{C}S_3$ irredutível. A decomposição canónica da restrição de V a S_1 é dada por

$$V|_{S_1} = V^{T_1} \oplus V^{T_2}$$

onde

$$T_1 : [\rho_1] \nearrow [\rho_2] \nearrow [\rho_5]$$

$$T_2 : [\rho_1] \nearrow [\rho_3] \nearrow [\rho_5]$$

Temos então que

$$\mathbb{C}S_3 \cdot V^{T_1} \cong V^{\rho_5}, \quad \mathbb{C}S_3 \cdot V^{T_2} \cong V^{\rho_5}$$

$$\mathbb{C}S_2 \cdot V^{T_1} \cong V^{\rho_2} \quad \text{e} \quad \mathbb{C}S_2 \cdot V^{T_2} \cong V^{\rho_3}.$$

Observações: Se V é um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível, o número de caminhos distintos em \mathbb{B} até ao vértice relativo à classe de equivalência da representação correspondente a V dá-nos a dimensão do módulo V .

Notação: Um caminho em \mathbb{B} que comece no único vértice do primeiro nível $[\rho_1]$ e termine em $[\rho]$, onde ρ é uma representação irredutível de S_n , irá ser referido como um ρ -caminho e denotado por T_ρ .

2.2.1 Base e Álgebra de Gelfand-Zetlin

Tendo em conta a canonicidade da decomposição de uma restrição a S_{n-1} de V , módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível, podemos escolher vetores para uma base de V , respeitando essa decomposição.

Considerando V um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível e a sua decomposição canónica (2.1), para cada T_ρ podemos escolher um vetor v_{T_ρ} de cada V^{T_ρ} obtendo assim uma base $\{v_{T_\rho}\}$ de V , a que damos o nome de **base de Gelfand-Zetlin** ou simplesmente, base-GZ.

Lema 2.2.2. *Seja V um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível e, para $1 \leq i \leq n$, $V_i \subseteq V$ um módulo- $\mathbb{C}S_i$ irredutível, tal que existe um caminho T em \mathbb{B} que contém os vértices correspondentes às classes de equivalência das representações correspondentes a V e a V_i , $\forall i$. Então*

$$V_i = \mathbb{C}S_i \cdot v, \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow v \in \text{base-GZ de } V$$

Observações: Consideremos a decomposição da álgebra $\mathbb{C}S_n$ de acordo com o Teorema de Wedderburn-Artin

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \in S_n^\wedge} \text{End}_{\mathbb{C}}(V^\lambda). \quad (2.2)$$

Esta decomposição é canónica por isso, para cada V^λ , podemos escolher uma base-GZ e assim também podemos decompôr $\mathbb{C}S_n$ da seguinte forma

$$\mathbb{C}S_n \cong \bigoplus_{\lambda \in S_n^\wedge} M_{\dim V^\lambda}(\mathbb{C}).$$

A **subálgebra de Gelfand-Zetlin**, ou simplesmente a subálgebra-GZ, define-se como a subálgebra $\mathcal{A}_n \subseteq \mathbb{C}S_n$ que consiste em todos os elementos $x \in \mathbb{C}S_n$ que são diagonais em relação à base-GZ em todos os módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis.

Lema 2.2.3. *\mathcal{A}_n é uma subálgebra maximal comutativa de $\mathbb{C}S_n$ e além disso é semi-simples.*

Proposição 2.2.4.

- [1] \mathcal{A}_n é gerada pelas subálgebras $Z_1, \dots, Z_n \subseteq \mathbb{C}S_n$.
- [2] \mathcal{A}_n é gerada pelos elementos-JM $J_1, \dots, J_n \in \mathbb{C}S_n$.

Demonstração.

- [1] Seja A a subálgebra de $\mathbb{C}S_n$ gerada por Z_1, \dots, Z_n .
Seja $e_V \in Z_n$ o idempotente central de $\mathbb{C}S_n$ que atua como a identidade em V e como um zero em todo o módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível não isomorfo a V .

Isto significa, tendo em conta a decomposição (2.2), que e_V é o endomorfismo identidade na componente V e o endomorfismo nulo nas restantes componentes. Se

$$T : [\lambda_1] \nearrow \dots \nearrow [\lambda_n]$$

é um caminho em \mathbb{B} então

$$e_{V^{\lambda_1}} \dots e_{V^{\lambda_n}} \in Z_1 \dots Z_n$$

atua como a projeção em V^T ao longo de $\bigoplus_{T' \neq T} V^{T'}$ e como zero em todos os módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis não isomorfos a V .

Assim, os elementos acima correspondem a matrizes diagonais com uma entrada igual a 1 e as restantes iguais a zero. Como estas matrizes geram o espaço das matrizes diagonais, $\mathcal{A}_n = A$.

$$\therefore A \supseteq \mathcal{A}_n.$$

- [2] Observe-se que J_k corresponde à soma de todas as transposições em S_k à qual se subtrai a soma de todas as transposições em S_{k-1} , isto é, J_k é a diferença entre um elemento central de S_k e um elemento central de S_{k-1} . Então, por [1], podemos concluir que

$$\therefore J_k \in \mathcal{A}_n, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Provemos, por indução, que os elementos-JM geram \mathcal{A}_n .
 $n = 1$

$$\langle J_1 \rangle = \mathbb{C} = \mathcal{A}_1.$$

Suponhamos que \mathcal{A}_n é gerado pelos elementos-JM J_1, \dots, J_n .

Sabemos por [1] que \mathcal{A}_{n+1} é gerada por \mathcal{A}_n e Z_{n+1} .

Tendo em conta a hipótese de indução, basta provar que \mathcal{A}_n e J_{n+1} geram Z_{n+1} , mas esta conclusão advém do mergulho natural $Z_{n+1} \subseteq Z_{n,1}$ e pelo teorema 1.2.6 pois $Z_n \subseteq \mathcal{A}_n$.

□

Corolário 2.2.5. *Seja $v \in \text{base-GZ de } V^\rho$, módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível. Tem-se que:*

- [1] *Os valores próprios dos elementos de \mathcal{A}_n associados a v determinam v no módulo de forma única (a menos do produto por um escalar);*
- [2] *Associamos a v um e um só caminho T_ρ no grafo da ramificação \mathbb{B} .*

Demonstração. Tendo em conta que \mathcal{A}_n é a álgebra de *todas* as matrizes diagonais, se todos os elementos de \mathcal{A}_n tivessem valores próprios iguais em dois vetores da base-GZ, isso forçaria que as correspondentes entradas de todas as matrizes de \mathcal{A}_n fossem iguais, o que seria um absurdo. \square

Corolário 2.2.6. *Todos os vetores da base-GZ são vetores próprios de todos os elementos-JM.*

Demonstração. Seja $v \in V$ um elemento da base-GZ de V . Pelo ponto [2] da proposição 2.2.4 sabemos que $J_i \in \mathcal{A}_n$, $\forall 1 \leq i \leq n$ temos que v é vetor próprio de qualquer elemento de \mathcal{A}_n , em particular dos elementos-JM.

$$\therefore J_i \cdot v = \lambda_i v, \quad \forall i \leq n, \quad \text{com } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

\square

Corolário 2.2.7. *Sejam λ e λ' duas representações- S_n irredutíveis e v vetor de uma base-GZ de V^λ . Tem-se que*

$$V^\lambda \not\cong V^{\lambda'} \iff v \notin \text{base-GZ de } V^{\lambda'}.$$

Demonstração. Sai diretamente do facto da base-GZ de todo o nível n do grafo da ramificação ser uma base da soma direta dos módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis. \square

Observações: Estamos perto de obter uma bijeção entre os vários caminhos T_ρ em \mathbb{B} e as várias bases-GZ distintas de módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis V^ρ , mas para isso precisamos de novas ferramentas que só apresentaremos no último capítulo.

Capítulo 3

Grafo de Young

Para alguns leitores poderá ser estranho só a meio deste trabalho introduzirmos o conceito de *diagramas de Young*, acontece que, ao contrário do que é feito classicamente, na abordagem desenvolvida por Okounkov & Vershik [OV] o paralelismo entre representações de S_n irredutíveis e partições de n surge como conclusão final e não como ferramenta para o desenvolvimento de toda a teoria.

Tanto os vértices como as arestas no *grafo de Young*¹ \mathbb{Y} são facilmente definidos, mas para um estudo mais cuidado dos caminhos em \mathbb{Y} iremos utilizar os *quadros de Young standard*.

Serviram de referência para este capítulo, Fulton & Harris [FH], Curtis & Reiner [CR], Zhao [Zh] e Kleshchev [Kl].

3.1 Vértices e Arestas

Nesta secção apresentamos o conceito de partição de um número natural e respetiva representação pictórica através dos diagramas de Young, os quais iremos representar com a notação anglo-saxónica, ou seja, o número de caixas por linha surge de forma decrescente.

Dizemos que $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ é uma **partição** de n se

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N} \quad , \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \quad e \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$$

Notação:

- O **conjunto de todas as partições** de n será representado por $\mathcal{P}(n)$ e o seu cardinal por $p(n)$;
- Iremos escrever $\lambda \vdash n$ para denotar que λ é uma partição de n .

¹Também conhecido como diagrama de *Bratteli*.

Observações:

- Se considerarmos duas partições de n

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad e \quad \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_{k'})$$

tem-se que:

$$\lambda = \lambda' \Leftrightarrow (k = k' \wedge \lambda_1 = \lambda'_1, \dots, \lambda_k = \lambda'_{k'}).$$

Por outro lado, ordenaremos as partições lexicograficamente:

$$\lambda > \lambda' \text{ se a primeira diferença não nula } \lambda_i - \lambda'_i \text{ é positiva;}$$

- Relembrando o corolário 1.1.6 podemos agora escrever que

$$|S_n^\vee| = p(n),$$

ou seja, existem tantas classes de conjugação em S_n como partições de n .

Exemplo 25. Segue-se uma lista completa das partições de $n = 3$ e respectivas representações vetoriais.

$$\begin{array}{ccc} 3 = 3 & 3 = 2 + 1 & 3 = 1 + 1 + 1 \\ (3) & (2, 1) & (1, 1, 1) \end{array}$$

Sendo assim tem-se que $p(3) = 3$.

Exemplo 26. Segue-se uma lista completa das partições de $n = 4$ e respectivas representações vetoriais.

$$\begin{array}{ccccc} 4 = 4 & 4 = 3 + 1 & 4 = 2 + 2 & 4 = 2 + 1 + 1 & 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \\ (4) & (3, 1) & (2, 2) & (2, 1, 1) & (1, 1, 1, 1) \end{array}$$

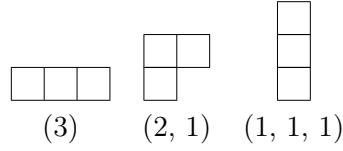
Sendo assim tem-se que $p(4) = 5$.

Observações: Podemos representar pictoricamente as partições de um número natural utilizando *diagramas de Young*².

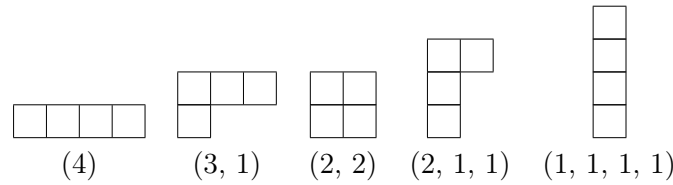
Um **diagrama de Young** é um coleção de caixas arrumadas em colunas justapostas com um número decrescente de caixas por coluna. O diagrama de Young associado à partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ terá k linhas e λ_i caixas na i -ésima linha.

²Referente ao matemático inglês Alfred Young, mas começaram essencialmente a ser notabilizados quando Georg Frobenius os utilizou no estudo dos grupos simétricos.

Exemplo 27. Os diagramas de Young correspondentes às partições de $n = 3$, descritas no exemplo 25, são:



Exemplo 28. Os diagramas de Young correspondentes às partições de $n = 4$, descritas no exemplo 26, são:



Observações:

- O diagrama de Young correspondente à partição λ será chamado λ -diagrama.
- Salvo indicação em contrário, λ será sempre uma partição de n .

O **Grafo de Young** \mathbb{Y} é um grafo indexável, infinito, com um nível para cada número natural n , construído da seguinte forma:

- os vértices no nível n são as partições de n , representadas pictoricamente pelos diagramas de Young respectivos;
- existe uma aresta a unir o λ -diagrama, sendo λ uma partição de n , com o μ -diagrama, sendo μ uma partição de $n-1$, se retirando uma caixa do λ -diagrama obtemos o μ -diagrama.

Notação:

- Ao conjunto $\mathcal{P}(n)$ chamamos de n -ésimo nível do grafo de Young;
- Escrevemos

$$\mu \nearrow \lambda$$

sempre que λ -diagrama possa ser obtido acrescentado uma única caixa ao μ -diagrama, o que significa que são vértices de \mathbb{Y} unidos por uma aresta, com $\mu \in \mathcal{P}(n-1)$ e $\lambda \in \mathcal{P}(n)$;

- Escrevemos

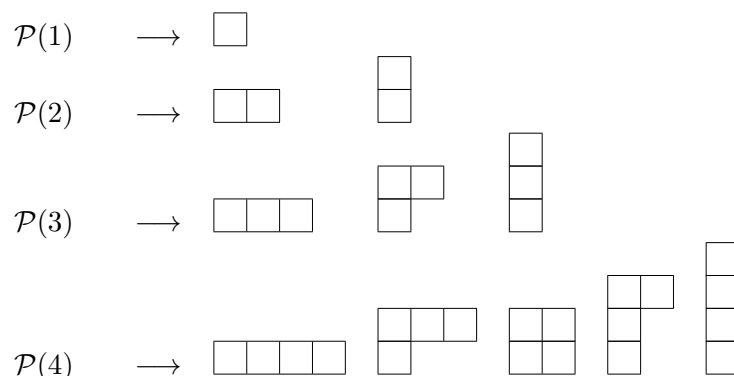
$$\mu \hookrightarrow \lambda,$$

com $\mu \in \mathcal{P}(k)$ e $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, onde $k \leq n$, quando existe um caminho em \mathbb{Y} do μ -diagrama para λ -diagrama, o que significa que é possível acrescentar caixas ao μ -diagrama até obter o λ -diagrama.

Observações: Os vértices do grafo de Young são os elementos do conjunto

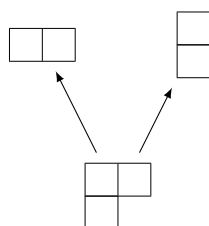
$$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}(n).$$

Exemplo 29. Os quatro primeiros níveis do grafo de Young terão os seguintes vértices.

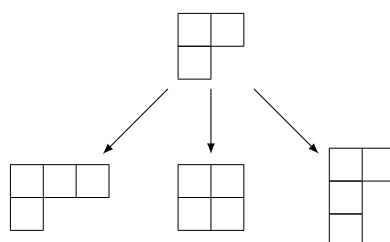


Uma caixa C de um diagrama de Young D diz-se **removível** (**adicionável**) se o diagrama de Young que se obtém de D retirando (respetivamente adicionando) C é também um diagrama de Young, desta feita associado a uma partição de $n - 1$ (respetivamente $n + 1$).

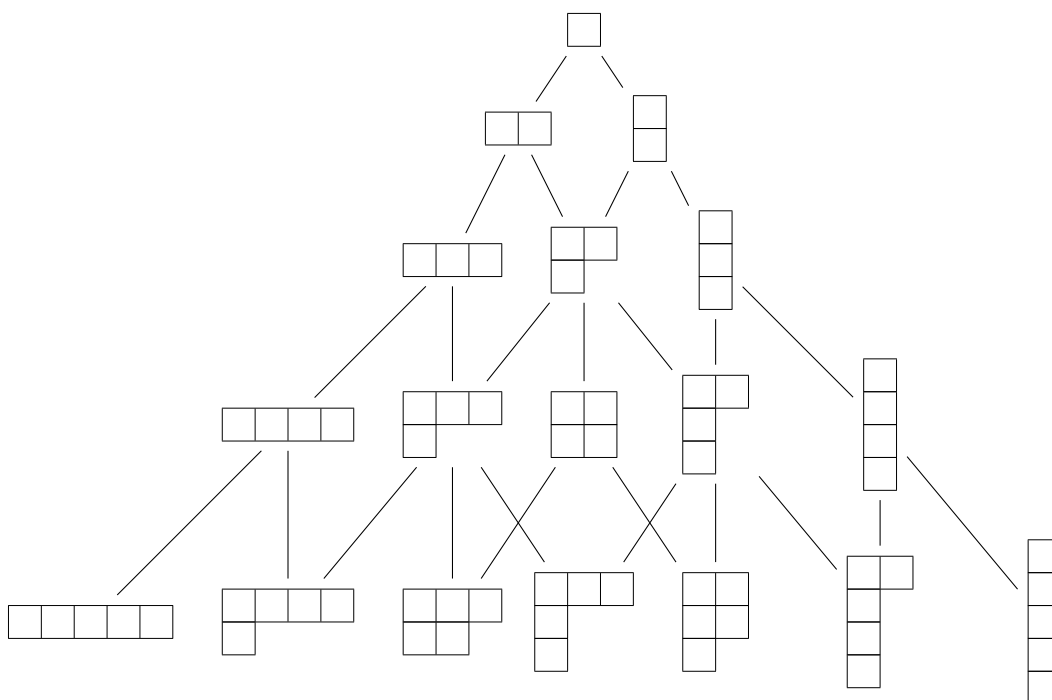
Exemplo 30. No caso do $(2, 1)$ -diagrama de Young existem duas caixas removíveis, logo obtemos duas arestas distintas em \mathbb{Y} que nos levam ao (2) -diagrama e ao $(1, 1)$ -diagrama, ambos situados no nível imediatamente acima do grafo.



Exemplo 31. Por outro lado, existem três caixas adicionáveis ao $(2, 1)$ -diagrama de Young e por isso obtemos três arestas distintas em \mathbb{Y} que nos levam ao $(3, 1)$ -diagrama, o $(2, 2)$ -diagrama e o $(2, 1, 1)$ -diagrama, todos situados no nível abaixo do grafo.



Exemplo 32. Podemos então representar os primeiros níveis do grafo de Young como a seguir se apresenta.



Nesta secção iremos estudar de forma mais cuidada os caminhos em \mathbb{Y} com o objetivo de no próximo capítulo conseguirmos estabelecer uma correspondência com os caminhos do grafo da ramificação \mathbb{B} . Com este objetivo começamos por apresentar o conceito de *quadro de Young*³.

³Tradução de *Young tableau*, designação utilizada em [FH] e em [Kl].

Exemplo 33. O próximo $(3, 1)$ -diagrama de Young preenchido com os números naturais de 1 a 4, é o que se chama um quadro de Young de padrão $(3, 1)$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 |
| 4 | | |

Notação: Quando Q é um quadro de Young de padrão λ dizemos que é uma λ -quadro.

3.2.1 Quadro de Young *standard*

Dentro do universo de quadros de Young existe uma família que terá um destaque preponderante para o desenvolvimento deste trabalho.

Um **quadro de Young *standard*** é um quadro de Young cujas entradas crescem ao longo de cada linha e ao longo de cada coluna.

Observações: O quadro de Young do exemplo 33 não é um quadro de Young *standard*.

Exemplo 34. Existem 4 quadros de Young *standard* para $n = 3$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | |
| 3 | | |

| | | |
|---|---|--|
| 1 | 3 | |
| 2 | | |
| | | |

| | | |
|---|--|--|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

Exemplo 35. Existem 11 quadros de Young *standard* para $n = 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | |
| 4 | | | |

| | | | |
|---|---|---|--|
| 1 | 2 | 4 | |
| 3 | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|--|
| 1 | 3 | 4 | |
| 2 | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|--|
| 1 | 2 | | |
| 3 | 4 | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|--|
| 1 | 3 | | |
| 2 | 4 | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|--|
| 1 | 4 | | |
| 2 | 3 | | |
| | | | |

| | | | |
|---|--|--|--|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

Um **quadro de Young canônico** é um quadro de Young cujas entradas crescem ao longo de cada linha e de linha para linha, obedecendo à ordem das mesmas.

Notação: Para cada partição λ há apenas um quadro canônico, que denotaremos por Q_λ .

Observações:

- No exemplo 34 apenas o 1.º, 2.º e 4.º quadros são canônicos;
- No exemplo 35 apenas o 1.º, 2.º, 5.º, 8.º e 11.º quadros são canônicos.

Notação: Um caminho em \mathbb{Y} que comece no único vértice do primeiro nível e termine no diagrama associado a λ irá ser referido como um λ -caminho e denotado por T_λ .

Observações: A cada caminho T_λ em \mathbb{Y} associamos uma construção do λ -diagrama a partir de uma única caixa a que se vai acrescentando caixas adiconáveis até se obter o diagrama pretendido, ou seja, T_λ pode ser visto como uma sequência de caixas

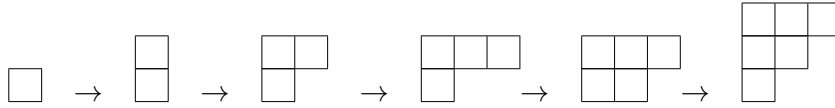
$$C_1, \dots, C_n$$

do λ -diagrama tal que C_n é removível para λ , C_{n-1} é removível para o diagrama que se obtém quando se retira C_n e assim sucessivamente.

Se, para todo o $i \in \{1, \dots, n\}$, escrevermos o número i na caixa C_i obtemos um λ -quadro de Young tal que as entradas surgem por ordem crescente de cima para baixo ao longo das colunas e da esquerda para a direita ao longo das linhas, ou seja, será um quadro de Young *standard*.

Sendo assim, associamos a cada caminho T_λ em \mathbb{Y} , um λ -quadro de Young *standard* que se obtém numerando cada caixa do λ -diagrama com o número da ordem em que esta foi colocada, tendo em conta que só se podem colocar caixas à direita ou por baixo das caixas já colocada, sem deixar espaços horizontais ou verticais entre caixas.

Exemplo 36. Ao seguinte caminho em \mathbb{Y}

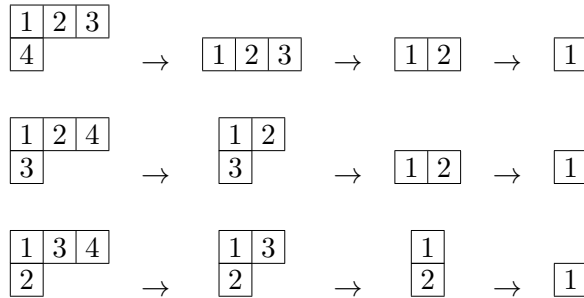


associamos o seguinte quadro de Young *standard*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | |
| 6 | | |

Observações: Por outro lado, ao considerarmos dois quadros de Young *standard*, referentes a um mesmo λ -diagrama de Young, associamos a cada um um caminho distinto em \mathbb{Y} , estipulado pela localização dos números inteiros nas caixas dos quadros.

Exemplo 37. No caso dos quadros de Young *standard* associados à partição $(3,1)$, temos a seguinte correspondência com caminhos em \mathbb{Y}



Observações: Podemos formular o observado na seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Existem tantos λ -quadros de Young standard como caminhos T_λ .*

Demonstração. Imediato das observações anteriores. \square

Na **atuação de uma permutação σ sobre um quadro Q** , obtém-se um quadro de Young associado ao mesmo diagrama que Q , tal que se a está na posição (i, j) em Q , então $\sigma(a)$ estará na posição (i, j) em σQ .

Exemplo 38. Se $Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 9 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 8 & & \\ \hline 4 & 1 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$ e $\sigma = (125)(34)(79)$ então

$$\sigma Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 7 & 4 & 6 \\ \hline 1 & 8 & & \\ \hline 3 & 2 & & \\ \hline 9 & & & \\ \hline \end{array}.$$

Num diagrama de Young, ao conjunto de caixas cuja diferença entre o número da coluna e o número da linha onde se encontram coincide chamamos de **diagonal** do diagrama.

Uma transposição que ao atuar num quadro de Young troque as posições de duas entradas consecutivas que não se encontram em diagonais adjacentes diz-se **admissível**.

Proposição 3.2.2. *Se Q é um λ -quadro de Young então existe uma série de transposições admissíveis que transformam Q em Q_λ .*

Demonstração. Seja C a última caixa da última linha do diagrama de Young associado a λ .

Em Q_λ , a entrada em C será n . Em Q , a entrada em C será algum natural $i \leq n$.

Observe-se que em Q , os números $i + 1$ e i não poderão estar dispostos em diagonais adjacentes. Então podemos aplicar uma transposição admissível para trocarmos i com $i + 1$, depois $i + 1$ com $i + 2$ e assim sucessivamente.

Como resultado teremos um novo λ -quadro em que C estará ocupada com n .

Se pensarmos de forma análoga para a penúltima caixa iremos obter uma cadeia de transposições admissíveis que transformam Q em Q_λ . \square

Exemplo 39. Observe-se como o $(3,1)$ -quadro de Young $\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & & \end{smallmatrix}$ se transforma em $Q(3,1)$.

$$\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{(24)} \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} \\ \boxed{4} & & \end{smallmatrix} \xrightarrow{(23)} \begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & & \end{smallmatrix}$$

Ou seja o ciclo (234) transforma o $(3,1)$ -quadro de Young $\begin{smallmatrix} \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \boxed{2} & & \end{smallmatrix}$ em $Q(3,1)$.

Capítulo 4

Espetro e Resumo

Neste último capítulo estabelecemos finalmente uma bijeção entre os caminhos do grafo da ramificação \mathbb{B} e os caminhos do grafo de Young \mathbb{Y} , comparando os conjuntos *Espetro*¹ e *Resumo*² que iremos definir a partir dos vetores de bases Gelfand-Zetlin e dos quadros de Young *standard*, respetivamente. Na verdade estes conjuntos vão ser o mesmo o que nos garante, para além da igualdade de caminhos em \mathbb{B} e em \mathbb{Y} , a natureza dos valores próprios dos vetores de uma base Gelfand-Zetlin em relação ao elementos Jucys-Murphy.

Para finalizar este trabalho, iremos voltar aos exemplos do capítulo 1 onde foram descritas as representações irredutíveis de S_1 , S_2 e S_3 , obtendo-as agora através dos diagramas de Young.

Esta abordagem foi teorizada por Okounkov e Vershik em [OV] e mais tarde explicada por Kleshchev em [Kl], trabalhos que serviram de base ao que aqui se apresenta, que corroboram a correspondência clássica entre partições e representações irredutíveis apresentada, por exemplo, por Curtis e Reiner em [CR], ou por Fulton e Harris em [FH], mas com a nuance da regra da ramificação ser transportada com a correspondência, pela forma como esta é estabelecida.

4.1 Pesos e Espetro

Nesta secção começamos por definir *peso*³ de um vetor que seja vetor próprio de todos os elementos Jucys-Murphy e observamos que a cada peso corresponde um e um só módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível, a menos de isomorfismo. Além disso, o peso de um vetor de um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível descreve um caminho específico no grafo da ramificação \mathbb{B} , entre o único vértice do nível 1 e a classe de equivalência da representação irredutível associada ao módulo em questão.

Salvo indicação em contrário, V será sempre um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível.

¹Tradução da designação utilizada em [OV].

²Palavra escolhida para representar o conjunto de todos os conteúdos num determinado nível do grafo de Young \mathbb{Y} . Nem em [OV] nem em [Kl] foi escolhida uma palavra para representar este conjunto.

³Tradução da designação utilizada em [OV] e em [Kl].

Seja $\mathcal{W} \subseteq V$ o subconjunto de todos os vetores que são vetores próprios, simultaneamente, de qualquer elemento-JM.

Para cada $v \in \mathcal{W}$ dizemos que o seu **peso** é dado pelo vetor

$$\gamma(v) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$$

onde $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ são os valores próprios associados aos elementos J_1, \dots, J_n em v , respetivamente.

Dizemos que γ é peso de um módulo irredutível V (e da representação irredutível correspondente) se e só se existe $v \in V$ tal que $v \in \gamma$ e $\gamma = \gamma(v)$.

Observações: Tendo em conta o corolário 2.2.6 sabemos que todos os vetores pertencentes a uma base-GZ pertencem a γ ;

Denotamos por

$$\mathcal{E}_n := \{\gamma(v) : v \in \text{base-GZ de um módulo-}\mathbb{C}S_n \text{ irredutível}\}$$

o **espectro** de grau n .

Proposição 4.1.1. *Um elemento $\gamma \in \mathcal{E}_n$ determina V , módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível, de forma única (a menos de isomorfismo) de tal forma que exista $v \in V$ que verifique a igualdade $\gamma(v) = \gamma$ e por isso*

$$|\mathcal{E}_n| = \sum_{[\rho] \in S_n^\wedge} \dim V^\rho, \quad \text{com } \rho \in [\rho].$$

Demonstração. Seja $\gamma \in \mathcal{E}_n$.

Sabemos então que $\exists v \in \text{base-GZ de um módulo-}\mathbb{C}S_n \text{ irredutível } V$ tal que $\gamma(v) = \gamma$. Pelo ponto [1] do corolário 2.2.5 sabemos que v é único em V , a menos do produto por um escalar.

Além disso, pelo corolário 2.2.7 sabemos que esse módulo V é único, a menos de isomorfismo. \square

Proposição 4.1.2. *T é um caminho T_ρ no grafo \mathbb{B} se e só se $\gamma(v_T)$ é peso de V^ρ .*

Demonstração. Seja T um caminho T_ρ do grafo \mathbb{B} .

(\implies) Pela própria definição de v_T este vetor pertence a V^ρ e por isso $\gamma(v_T)$ será obrigatoriamente um peso de V^ρ .

(\impliedby) Seja γ um peso de V^ρ , módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível.

Pela proposição 4.1.1 sabemos que a este peso corresponde um único vetor v (a

menos do produto por um escalar) tal que $\gamma(v) = \gamma$, vetor esse que irá pertencer a uma base-GZ de V^ρ mas, pelo ponto [2] do corolário 2.2.5 sabemos que a esse vetor irá corresponder um único caminho T em \mathbb{B} desde $[\rho_1]$ até $[\rho]$. \square

Notação:

- Um vetor que tenha como peso γ irá ser denotado por v_γ ;
- O peso correspondente a um caminho T irá ser denotado por γ_T e um caminho correspondente a um peso γ irá ser denotado por T_γ ;
- Um módulo irreduzível que tenha como peso γ irá ser denotado por V^γ e a representação associada por ρ_γ .

Observações: Podemos então chegar à conclusão que existem tantos caminhos no grafo \mathbb{B} , desde o nível 1 até uma classe de equivalência de uma representação- S_n irreduzível, como pesos no espectro de grau n .

Corolário 4.1.3.

$$|\mathcal{E}_n| = |\{T_\rho \text{ em } \mathbb{B} : [\rho] \in S_n^\wedge\}|.$$

Demonstração. Pelo ponto [2] do corolário 2.2.5 sabemos que a cada T_ρ , caminho do grafo \mathbb{B} , corresponde um único $v_T \in$ base-GZ de um certo módulo- $\mathbb{C}S_n$ irreduzível V^ρ (a menos do produto por um escalar).

Pela proposição 4.1.1 sabemos que associado a v_T existe um único peso $\gamma \in \mathcal{E}_n$ tal que $\gamma = \gamma(v_T)$. \square

Observações: É agora claro que para podermos conhecer melhor o grafo da ramificação \mathbb{B} basta conhecermos o conjunto de todos os pesos e a forma como estes se conjugam.

Para aprofundarmos o nosso estudo sobre pesos iremos estabelecer uma relação de equivalência em \mathcal{E}_n que nos permitirá estabelecer uma aplicação sobrejetiva entre pesos e classes de equivalência de representações- S_n irreduzíveis.

Sejam $\gamma, \theta \in \mathcal{E}_n$. Definimos \sim , relação de equivalência em \mathcal{E}_n , da seguinte forma

$$\gamma \sim \theta \Leftrightarrow v_\gamma \text{ e } v_\theta \text{ pertencem a módulos- } \mathbb{C}S_n \text{ irreduzíveis isomorfos.}$$

Observações: A definição anterior é equivalente a dizer que:

- γ e θ são pesos de representações- S_n irreduzíveis equivalentes;
- T_γ e T_θ terminam no mesmo vértice em \mathbb{B} .

Notação:

- Denotaremos por \mathcal{E}_n / \sim o conjunto de todas as classes de equivalência respeitantes à relação \sim ;
- Representaremos por $[\gamma]$ a classe de equivalência de γ .

Proposição 4.1.4. *Sejam $\theta \in \mathcal{E}_{n-1}$ e $\gamma \in \mathcal{E}_n$ tais que*

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad e \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Tem-se que os vértices do grafo \mathbb{B} são os elementos do conjunto

$$\bigsqcup_{n \geq 1} (\mathcal{E}_n / \sim)$$

e

$$[\theta] \nearrow [\gamma] \Leftrightarrow \exists \theta' \in [\gamma] : \theta' = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n)$$

para um certo $\theta_n \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

- Sejam $\gamma, \gamma' \in \mathcal{E}_n$. Pela proposição 4.1.1 e pela definição da relação \sim

$$[\gamma] \neq [\gamma'] \iff V^\gamma \not\cong V^{\gamma'} \iff [\rho_\gamma] \neq [\rho_{\gamma'}].$$

$$\therefore |\mathcal{E}_n / \sim| = |S_n^\wedge|, \quad \forall n.$$

- Sejam $\theta \in \mathcal{E}_{n-1}$ e $\gamma \in \mathcal{E}_n$ tais que

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad e \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Pela proposição 4.1.1 sabemos que existe um único (a menos de isomorfismo) módulo- $\mathbb{C}S_{n-1}$ irredutível V^θ onde, pelo ponto [1] do corolário 2.2.5, sabemos que existe um único (a menos do produto por um escalar) vetor $v \in \text{base-GZ de } V^\theta$ tal que $\gamma(v) = \theta$.

Suponhamos que $[\rho_\theta] \nearrow [\rho_\gamma]$. Então que existe um módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível $V^{\theta'}$, isomorfo a V^γ , que quando restrito a S_{n-1} tem na sua decomposição em módulos- $\mathbb{C}S_{n-1}$ irredutíveis V^θ . Sendo assim, terá de existir necessariamente uma base-GZ de $V^{\theta'}$ que contem v e, se considerarmos θ_n o valor próprio do elemento-JM J_n associado ao vetor v , sabemos que

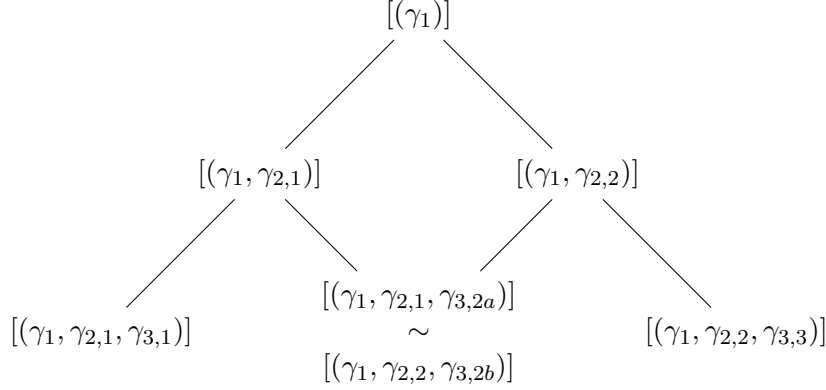
$$\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n) \in \mathcal{E}_n$$

é peso de v e, como $V^{\theta'} \cong V^\gamma$, temos obrigatoriamente que

$$\therefore \theta' \in [\gamma].$$

□

Exemplo 40. Podemos agora olhar para o grafo \mathbb{B} da seguinte forma:



onde os vértices são classes de equivalência de \mathcal{E}_n / \sim , o que nos permite concluir que para S_3 existem duas classes de equivalência distintas de representações irredutíveis de dimensão 1 e apenas uma classe de equivalência de representações irredutíveis de dimensão 2, corroborando o que foi visto na proposição 1.3.7.

Observações: Até ao momento provámos que cada peso γ identifica de forma única V^γ , a menos de isomorfismo, apesar do contrário não se verificar pois cada representação irredutível está muitas vezes associada a diferentes pesos. Tendo em conta isto podemos reescrever o lema 2.2.1 da forma que a seguir se apresenta.

Corolário 4.1.5. *Sejam ρ uma representação- S_n irredutível e T é um caminho T_ρ em \mathbb{B} . Se $\gamma_T = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, então*

$$\mathbb{C}S_k \cdot v_T \cong V^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}.$$

para todo o $k \leq n$.

Demonstração. Suponhamos que

$$T : [\rho_1] \nearrow \dots \nearrow [\rho_n] = [\rho]$$

um caminho em \mathbb{B} e $\gamma_T = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Seja $k \leq n$. Pelo lema 2.2.1 temos que

$$\mathbb{C}S_k \cdot v_T \cong V^{\rho_k}.$$

Denotemos por T_k o caminho que percorre \mathbb{B} de $[(1)]$ até $[\rho_k]$ da mesma forma que T . Pela proposição 4.1.2 sabemos que se T_k termina em $[\rho_k]$ então $\gamma_{T_k} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ será peso de V^{ρ_k} , mas pela proposição 4.1.1 temos obrigatoriamente que

$$V^{\gamma_{T_k}} = V^{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)} \cong V^{\rho_k}.$$

□

4.1.1 Álgebra de Hecke

Nesta próxima secção o nosso objetivo é tentar perceber que tipo de vetores de \mathbb{C}^n poderão corresponder a pesos e que características partilham pesos equivalentes. Para este estudo iremos utilizar a noção de *álgebra de Hecke afim degenerada de classe 1* mas não aprofundaremos as inúmeras relações entre este trabalho e a *Teoria de Lie*.

A álgebra \mathcal{H}_2 gerada sobre \mathbb{C} pelos elementos s, x, y sujeitos às relações

$$xy = yx, \quad s^2 = 1, \quad sx = ys - 1$$

é chamada de **álgebra de Hecke** afim degenerada de classe 1.

Recorremos à noção de álgebra de Hecke tendo em conta as propriedades apresentadas na proposição seguinte, verificadas por determinados pares de elementos-JM juntamente com certas transposições básicas, já estudadas no capítulo 1.

Proposição 4.1.6. *Para todo o $i < n$ temos que:*

- [1] $s_i J_i = J_{i+i} s_i - 1$;
- [2] $s_i J_{i+1} = J_i s_i + 1$;
- [3] $s_i J_j = J_j s_i, \quad j \neq i, i+1$.

Demonstração. Seja $i < n$.

1.º caso Suponhamos que $j = i$.

$$\begin{aligned} s_i J_i &= (i \ i+1)[(1 \ i) + \dots + (i-1 \ i)] \\ &= (i \ i+1)(1 \ i) + \dots + (i \ i+1)(i-1 \ i) \\ &= (1 \ i+1 \ i) + \dots + (i-1 \ i+1 \ i) + 1 - 1 \\ &= (1 \ i+1)(i \ i+1) + \dots + (i-1 \ i+1)(i \ i+1) + (i \ i+1)(i \ i+1) - 1 \\ &= [(1 \ i+1) + \dots + (i-1 \ i+1) + (i \ i+1)](i \ i+1) - 1 = J_{i+1} s_i - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore s_i J_i = J_{i+i} s_i - 1.$$

2.º caso Suponhamos que $j = i + 1$.

$$\begin{aligned} s_i J_{i+1} &= (i \ i+1)[(1 \ i+1) + \dots + (i-1 \ i+1) + (i \ i+1)] \\ &= (i \ i+1)(1 \ i+1) + \dots + (i \ i+1)(i-1 \ i+1) + (i \ i+1)(i \ i+1) \\ &= (1 \ i \ i+1) + \dots + (i-1 \ i \ i+1) + 1 \\ &= (1 \ i)(i \ i+1) + \dots + (i-1 \ i)(i \ i+1) + 1 \\ &= [(1 \ i) + \dots + (i-1 \ i)](i \ i+1) + 1 = J_i s_i + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore s_i J_{i+1} = J_i s_i + 1.$$

3.º caso Suponhamos que $j \neq i, i+1$.

$$s_i J_j = (i \ i+1)[(1 \ j) + \dots + (j-1 \ j)] = (i \ i+1)(1 \ j) + \dots + (i \ i+1)(j-1 \ j).$$

Como estamos perante uma soma de produtos de ciclos disjuntos temos necessariamente que

$$\therefore s_i J_j = J_j s_i.$$

□

Para $a, b \in \mathbb{C}$, definimos $\mathcal{L}(a, b)$, módulo- \mathcal{H}_2 , da seguinte forma:

- Se $b = a \pm 1$ então $\mathcal{L}(a, b) = \mathbb{C}v$ com as ações dos três geradores dadas pelas equações

$$xv = av, \quad yv = bv, \quad sv = (b - a)v;$$

- Se $b \neq a \pm 1$ então $\mathcal{L}(a, b)$ será um módulo de dimensão 2 e existirá uma base $\{u_1, u_2\}$ sobre a qual as ações dos três geradores podem ser representadas matricialmente por

$$\mathcal{M}_{\{u_1, u_2\}} x = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{\{u_1, u_2\}} y = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{\{u_1, u_2\}} s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Lema 4.1.7.

- [1] Qualquer módulo- \mathcal{H}_2 irredutível é isomorfo a algum $\mathcal{L}(a, b)$.
- [2] Se $a \neq b \pm 1$ então $\mathcal{L}(a, b) \cong \mathcal{L}(b, a)$, e não existem outros pares isomorfos em $\{\mathcal{L}(a, b) : a, b \in \mathbb{C}\}$.

Demonstração.

- [1] Seja V um módulo- \mathcal{H}_2 irredutível.

Como \mathcal{H}_2 é uma álgebra sobre \mathbb{C} sabemos que x e y terão obrigatoriamente um vetor próprio e, além disso, como estes elementos comutam, sabemos que terão de partilhar um vetor próprio.

Seja $v \in V$ vetor próprio de x e de y , simultaneamente. Então

$$xv = av, \quad yv = bv \quad \text{para certos } a, b \in \mathbb{C}.$$

- 1.º caso** Se v também for vetor próprio de s , como por hipótese V é irredutível, temos obrigatoriamente que

$$V = \mathbb{C}v.$$

Além disso, neste caso, sabemos que $\exists k \in \mathbb{C}$ tal que $sv = kv$. Mas como, por definição, $s^2 = 1$, temos que

$$sv = kv = kssv = kskv = k^2sv$$

e por isso $k = \pm 1$, ou seja,

$$\therefore sv = \pm v.$$

Esta conclusão implica que

$$\begin{aligned} bv &= y(v) = \pm(ys)v = \pm(sx + 1)v = \pm s(xv) \pm v \\ &= \pm a(sv) \pm v = \pm \pm av \pm v \\ &= (a \pm 1)v \end{aligned}$$

e se correspondem ao mesmo múltiplo de v temos obrigatoriamente que $b = a \pm 1$.

$$\therefore V = \mathcal{L}(a, b);$$

2.º caso Se v não é valor próprio de s temos que $\{v, sv\}$ é linearmente independente. Observemos que

$$\begin{aligned} xv &= av + 0sv, & yv &= bv + 0sv, & sv &= 0v + 1sv, \\ xsv &= s(sx)sv & ysv &= (sx + 1)v & ssv &= 1v + 0sv, \\ &= s(ys - 1)sv & &= sxv + 1v \\ &= sy(ss)v - ssv & &= 1v + asv, \\ &= -1v + bsv, \end{aligned}$$

ou seja, os geradores de \mathcal{H}_2 escrevem-se como combinação linear de $\{v, sv\}$ por isso este conjunto de vetores será uma base de V o que faz com que este módulo tenha dimensão 2 e as ações dos geradores sejam descritas matricialmente pelas matrizes (4.1) onde $\{u_1, u_2\} = \{v, sv\}$.

Provemos que, neste caso, para $\mathcal{L}(a, b)$ ser irredutível temos de ter $a \neq b \pm 1$.

1.º subcaso Se $a = b+1$, atualizando as matrizes de (4.1) observamos que:

$$\begin{aligned} x(v + sv) &= xv + xsv = (b + 1)v - v + bsv = bv + v - v + bsv \\ &= b(v + sv) \\ y(v + sv) &= yv + ysv = bv + v + (b + 1)sv = b(v + sv) + v + sv \\ &= (b + 1)(v + sv) \\ s(v + sv) &= sv + ssv = v + sv \end{aligned}$$

o que faz com que $\mathbb{C}(v + sv)$ seja um submódulo de V o que é absurdo.

$$\therefore a \neq b+1.$$

2.º subcaso Se $a = b-1$, atualizando as matrizes de (4.1) observamos que:

$$\begin{aligned} x(v - sv) &= xv - xsv = (b - 1)v + v - bsv = bv - v + v - bsv \\ &= b(v - sv) \\ y(v - sv) &= yv - ysv = bv - v - (b - 1)sv = b(v - sv) - v + sv \\ &= (b - 1)(v - sv) \\ s(v - sv) &= sv - ssv = v - sv \end{aligned}$$

o que faz com que $\mathbb{C}(v - sv)$ seja um submódulo de V o que é absurdo.

$$\therefore a \neq b-1.$$

Temos então novamente que $V = \mathcal{L}(a, b)$;

[2] Suponhamos agora que $a \neq b \pm 1$.

1.º caso Se $a = b$ trivial.

2.º caso Se $a \neq b$ podemos proceder a uma mudança de base de $\{v, sv\}$ para $\{v, v'\} = \{v, -(b-a)^{-1}v + sv\}$, associada à matriz de mudança de base:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -(b-a)^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtendo as matrizes

$$\mathcal{M}_{\{v, v'\}}x = P^{-1} \times \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \times P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\{v, v'\}}y = P^{-1} \times \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \times P = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\{v, v'\}}s = P^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times P = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} & 1 - \frac{1}{\sqrt{b-a}} \\ 1 & -\frac{1}{b-a} \end{bmatrix}$$

Seja $u = sv$. Se procedermos a uma mudança de base de $\{v, u\}$ para

$$\{v, 1/\sqrt{1 - (b-a)^{-2}}(u - 1/(b-a)v),$$

chamando a estes novos vetores v_{ab} e u_{ab} , respetivamente, a matriz de s em relação a esta nova base é

$$s_{ab} = \begin{bmatrix} 1/(b-a) & \sqrt{1 - (b-a)^{-2}} \\ \sqrt{1 - (b-a)^{-2}} & 1/(a-b) \end{bmatrix}$$

que é simétrica, ortogonal e verifica $Ps_{ab}P^{-1} = s_{ba}$, com

$$P = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pomos igualmente $x_{ab} = \text{diag}(a, b)$ e $y_{ab} = \text{diag}(b, a)$. Temos

$$Px_{ab}P^{-1} = x_{ba} \text{ e } Py_{ab}P^{-1} = y_{ba}$$

Consideremos a aplicação

$$f : \mathcal{L}(a, b) \rightarrow \mathcal{L}(b, a)$$

definida através das imagens da base $f(v_{ab}) = u_{ba}$ e $f(u_{ab}) = v_{ba}$. A matriz desta aplicação linear a respeito das bases $\{v_{ab}, u_{ab}\}$ e $\{v_{ba}, u_{ba}\}$ é exatamente P o que já mostra que é isomorfismo. As relações de semelhança entre matrizes descritas acima mostram que f é um isomorfismo de módulos, assim, neste caso

$$\therefore \mathcal{L}(a, b) \cong \mathcal{L}(b, a).$$

Se $\mathcal{L}(a, b) \cong \mathcal{L}(c, d)$ então as suas restrições a $\langle x, y \rangle$ são obrigatoriamente isomorfas e por isso

$$\therefore (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c).$$

□

Observações: Tendo em conta o observado, vamos focar-nos na subálgebra de $\mathbb{C}S_n$, \mathcal{B}_i , gerada apenas pelos elementos s_i, J_i e J_{i+1} , para daí tirarmos algumas conclusões sobre propriedades dos pesos, tendo em conta que as entradas $i, i+1$ de cada peso irão desempenhar o papel dos elementos a, b do lema 4.1.7.

Para $i < n$ iremos considerar a subálgebra de $\mathbb{C}S_n$

$$\mathcal{B}_i := \langle s_i, J_i, J_{i+1} \rangle.$$

Corolário 4.1.8. *Consideremos*

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{E}_n.$$

Para qualquer $i < n$, tem-se que:

[1] $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$;

[2] $\gamma_{i+1} = \gamma_i \pm 1 \Rightarrow s_i v_\gamma = \pm v_\gamma$;

[3] Se $\gamma_{i+1} \neq \gamma_i \pm 1$ então

(i) $\tilde{\gamma}^i = s_i \gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \gamma_i, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{E}_n$;

(ii) $\gamma \sim \tilde{\gamma}^i$;

(iii) $v_{\tilde{\gamma}^i} = \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma \right)$;

(iv) As ações dos elementos s_i, J_i, J_{i+1} segundo a base $\{v_\gamma, v_{\tilde{\gamma}^i}\}$ podem ser descritas matricialmente por

$$\mathcal{M}_{\{v_\gamma, v_{\tilde{\gamma}^i}\}} J_i = \begin{bmatrix} \gamma_i & 0 \\ 0 & \gamma_{i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{\{v_\gamma, v_{\tilde{\gamma}^i}\}} J_{i+1} = \begin{bmatrix} \gamma_{i+1} & 0 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{\{v_\gamma, v_{\tilde{\gamma}^i}\}} s_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} & 1 - \frac{1}{(\gamma_{i+1} - \gamma_i)^2} \\ 1 & \frac{1}{\gamma_i - \gamma_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{E}_n$.

Pela proposição 4.1.6 sabemos que \mathcal{B}_i é uma álgebra quociente de \mathcal{H}_2 e por isso sabemos que uma representação irredutível de \mathcal{H}_2 é obrigatoriamente irredutível de \mathcal{B}_i .

Pela definição de vetor associado a um peso, sabemos que v_γ é vetor próprio de J_i e de J_{i+1} , simultaneamente, com valores próprios γ_i e γ_{i+1} , respetivamente.

Consideremos $\mathcal{L}(\gamma_i, \gamma_{i+1})$, módulo- \mathcal{B}_i .

- [1] Por um processo análogo ao que foi feito na demonstração do ponto [1] do lema 4.1.7 sabemos que as ações dos elementos-JM J_i e J_{i+1} podem ser descritas matricialmente por

$$\mathcal{M}_{\{v_\gamma, s_i v_\gamma\} J_i} = \begin{bmatrix} \gamma_i & -1 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}_{\{v_\gamma, s_i v_\gamma\} J_{i+1}} = \begin{bmatrix} \gamma_i & 1 \\ 0 & \gamma_i \end{bmatrix}$$

mas isto faz com que J_i e J_{i+1} não atuem de forma diagonalizável sobre vetores de base-GZ, o que é absurdo, tendo em conta o ponto [2] da proposição 2.2.4.

$$\therefore \gamma_i \neq \gamma_{i+1}.$$

- [2] Suponhamos $\gamma_i = \gamma_{i+1} \pm 1$.

Pela própria definição de $\mathcal{L}(\gamma_i, \gamma_{i+1})$ sabemos que este módulo- \mathcal{B}_i terá dimensão 1 e a ação do elemento s_i pode ser dada por

$$\therefore s_i v_\gamma = (\gamma \pm 1 - \gamma_i) v_\gamma = \pm v_\gamma.$$

- [3] Suponhamos que $\gamma_{i+1} \neq \gamma_i \pm 1$ e consideremos

$$\tilde{\gamma}^i = (\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \gamma_i, \dots, \gamma_n).$$

Seja $v = \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i}\right) v_\gamma \in V^\gamma$.

1.º caso Se $j \neq i, i+1$ temos que

$$\begin{aligned} J_j v &= J_j \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i}\right) v_\gamma = J_j s_i v_\gamma - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} (J_j v_\gamma) \\ &= s_i (J_j v_\gamma) - \frac{\gamma_j}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma \quad (\text{prop. 4.1.6 [2]}) \\ &= s_i \gamma_j v_\gamma - \frac{\gamma_j}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma = \gamma_j \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i}\right) v_\gamma = \gamma_j v; \end{aligned}$$

2.º caso Se $j = i$ temos que

$$\begin{aligned}
 J_i v &= J_i \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma = J_i s_i v_\gamma - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} (J_i v_\gamma) \\
 &= (s_i J_{i+1} - 1) v_\gamma - \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma \quad (\text{prop. 4.1.6 [1]}) \\
 &= s_i (J_{i+1} v_\gamma) - v_\gamma - \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma = \\
 &= \gamma_{i+1} s_i v_\gamma - \left(\frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} + \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma \\
 &= \gamma_{i+1} \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma = \gamma_{i+1} v;
 \end{aligned}$$

3.º caso Se $j = i + 1$ temos que

$$\begin{aligned}
 J_{i+1} v &= J_{i+1} \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma = J_{i+1} s_i v_\gamma - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} (J_{i+1} v_\gamma) \\
 &= (s_i J_i + 1) v_\gamma - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma \quad (\text{prop. 4.1.6 [1]}) \\
 &= s_i (J_i v_\gamma) + v_\gamma - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} v_\gamma = \\
 &= \gamma_i s_i v_\gamma + \left(\frac{\gamma_{i+1} - \gamma_i}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma \\
 &= \gamma_i \left(s_i - \frac{1}{\gamma_{i+1} - \gamma_i} \right) v_\gamma = \gamma_i v.
 \end{aligned}$$

Pelos três casos anteriores concluímos então que v é um vetor de peso $\tilde{\gamma}^i$.

$$\therefore \tilde{\gamma}^i \in \mathcal{E}_n, \quad \gamma \sim \tilde{\gamma}^i, \quad v = v_{\tilde{\gamma}^i}.$$

e, por um processo análogo ao que foi feito no ponto [2] do lema 4.1.7 podemos concluir que as ações dos elementos s_i, J_i, J_{i+1} segundo a base $\{v_\gamma, v_{\tilde{\gamma}^i}\}$ podem ser descritas matricialmente pelas matrizes apresentadas no ponto [3] – (iv) deste corolário.

□

Corolário 4.1.9. *Seja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$.*

$$\exists i \leq n-2 : \theta_i = \theta_{i+2} = \theta_{i+1} \pm 1 \implies \theta \notin \mathcal{E}_n$$

Demonstração. Seja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{C}^n$.

Suponhamos que $\theta_i = \theta_{i+2} = \theta_{i+1} \pm 1$ para um certo $i \leq n-2$ e, com vista a um absurdo, que

$$\theta \in \mathcal{E}_n.$$

Pelo ponto [2] do corolário 4.1.8 temos então que

$$s_i v_\theta = \pm v_\theta \quad \wedge \quad s_{i+1} v_\theta = \mp v_\theta$$

mas estas igualdades contradizem a relação trança $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

$$\therefore \theta \notin \mathcal{E}_n.$$

□

Lema 4.1.10. *Seja $\gamma \in \mathcal{E}_n$. Então:*

- [1] $\gamma_1 = 0$;
- [2] $\{\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}\} \cap \{\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}\} \neq \emptyset, \quad \forall 2 \leq i \leq n$;
- [3] $\exists i < j : \gamma_i = \gamma_j = a \implies \{a-1, a+1\} \subseteq \{\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}\}$.

Demonstração.

- [1] Por definição, $J_1 = 0 \implies J_1 v = 0v, \forall v \in \text{base-GZ}$.

$$\therefore \gamma_1 = 0, \quad \forall \gamma \in \mathcal{E}_n.$$

- [2] Suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$\{\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}\} \cap \{\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}\} = \emptyset.$$

Podemos então aplicar o ponto [3] do corolário 4.1.8 repetidamente, trocando γ_i com γ_{i-1} e depois com γ_{i-2} , etc., até γ_i se encontrar na segunda posição de um certo peso.

- Se $\gamma_i = 0$ obtemos um peso que começa com dois 0's, o que contradiz o ponto [1] do corolário 4.1.8.
- Se $\gamma_i \neq 0$, novamente pelo ponto [3] do corolário 4.1.8, conseguimos obter um peso em que a sua primeira posição é $\gamma_i \neq 0$ o que contradiz o ponto [1] deste lema.

$$\therefore \{\gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}\} \cap \{\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}\} \neq \emptyset, \quad \forall 2 \leq i \leq n.$$

- [3] Suponhamos, com vista a um absurdo, que $\gamma_i = \gamma_j = a$, para certos $i < j$, e que

$$\{a-1, a+1\} \not\subseteq \{\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}\}. \quad (4.2)$$

De todos os pares (i, j) em que (4.2) acontece, peguemos no que a diferença $j-i$ é mínima.

Pelos pontos [1] e [2] do corolário 4.1.8 e pelo corolário 4.1.9 temos que

$$\gamma = (\dots, a, a \pm 1, \dots, a \pm 1, a, \dots).$$

Por termos escolhido $j-i$ mínima, tanto $a \pm 1 + 1$ como $a \pm 1 - 1$ terão de se encontrar entre as duas entradas de $a \pm 1$ de γ o que faz com que exista uma entrada igual a a entre elas o que contradiz a minimalidade de $j-i$.

$$\therefore \{a-1, a+1\} \subseteq \{\gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{j-1}\}.$$

□

4.2 Conteúdos e Resumo

Nesta secção voltamos a pegar nos diagramas de Young e desenvolvemos um estudo semelhante ao que foi feito na primeira secção deste capítulo com representações irredutíveis. Por isso começamos por definir *conteúdo*⁴ de um quadro de Young, através dos *resíduos*⁵ das caixas do quadro, e focamo-nos nos quadros de Young *standard* tendo em conta que observámos no capítulo 3 que a cada um corresponde um caminho específico no grafo de Young \mathbb{Y} , entre o único vértice do nível 1 e o diagrama de Young associado ao quadro em questão.

Salvo indicação em contrário, λ será sempre uma partição de n .

Se Q é um quadro de Young e C_i é a caixa de Q ocupada pela entrada i , o **resíduo** da entrada i é dado pela diferença

$$\delta_i := \text{coluna}(C_i) - \text{linha}(C_i)$$

onde $\text{coluna}(C_i)$ e $\text{linha}(C_i)$ representam, respetivamente, o número da coluna e o número da linha onde se encontra a caixa C_i em Q .

Exemplo 41. No (4,2,2,1)-quadro de Young Q

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 3 | 6 |
| 5 | 8 | | |
| 4 | 1 | | |
| 7 | | | |

tem-se que:

$$\begin{array}{lll} \delta_1 = 2 - 3 = -1 & \delta_2 = 1 - 1 = 0 & \delta_3 = 3 - 1 = 2 \\ \delta_4 = 1 - 3 = -2 & \delta_5 = 1 - 2 = -1 & \delta_6 = 4 - 1 = 3 \\ \delta_7 = 1 - 4 = -3 & \delta_8 = 2 - 2 = 0 & \delta_9 = 2 - 1 = 1 \end{array}$$

⁴Esta designação não foi utilizada nem em [OV] nem em [KI].

⁵Tradução da designação utilizada em [KI]. Em [OV] utiliza-se a expressão *content of a box*.

Para cada Q , λ -quadro de Young, dizemos que o seu **conteúdo** é dado pelo vetor

$$\delta(Q) := (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Z}^n$$

onde $\delta_1, \dots, \delta_n$ são os resíduos associados às entradas $1, \dots, n$ em Q , respectivamente.

Exemplo 42. Se $Q =$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 3 | 6 |
| 5 | 8 | | |
| 4 | 1 | | |
| 7 | | | |

 tem-se que:

$$\delta(Q) = (-1, 0, 2, -2, -1, 3, -3, 0, 1)$$

Denotamos por

$$\mathcal{R}_n := \{\delta(Q) : Q \text{ é um } \lambda\text{-quadro de Young } \textit{standard}\}$$

o **resumo** de grau n .

Proposição 4.2.1. *A cada elemento $\delta \in \mathcal{R}_n$ corresponde um e um só λ -quadro de Young standard e por isso*

$$|\mathcal{R}_n| = |\{Q : Q \text{ é um } \lambda\text{-quadro de Young standard}\}| = |\{T_\lambda \text{ em } \mathbb{Y}\}|.$$

Demonstração. Consequência imediata da definição de quadro de Young *standard* e da proposição 3.2.1. □

Notação:

- O quadro de Young *standard* que tem δ como conteúdo será denotado por Q_δ ;
- O conteúdo correspondente a um caminho T de \mathbb{Y} irá ser denotado por δ_T e o caminho correspondente a um conteúdo δ irá ser denotado por T_δ .

Observações: Podemos então olhar para o grafo de Young \mathbb{Y} como um conjunto de vetores conteúdo que retêm neles a informação de todos os caminhos possíveis em \mathbb{Y} .

Sejam $\delta, \eta \in \mathcal{R}_n$. Definimos \approx , relação de equivalência em \mathcal{R}_n , da seguinte forma

$$\delta \approx \eta \Leftrightarrow Q_\delta \text{ e } Q_\eta \text{ estão associados ao mesmo diagrama de Young.}$$

- δ e η são conteúdos do mesmo λ -diagrama de Young;
- T_δ e T_η terminam no mesmo vértice em \mathbb{Y} .

- Denotaremos por \mathcal{R}_n/\approx o conjunto de todas as classes de equivalência respeitantes à relação \approx ;
- Representaremos por $[\delta]$ a classe de equivalência de δ .

Diagram illustrating the construction of a 3D lattice structure from a root node (0) . The structure is a tree where nodes are labeled with coordinates (x, y, z) and edges represent transitions. Approximation symbols \approx indicate relationships between certain nodes.

- Root node: (0)
- Level 1 nodes: $(0, 1)$ and $(0, -1)$
- Level 2 nodes: $(0, 1, 2)$ and $(0, 1, -1)$ (from $(0, 1)$); $(0, -1, -2)$ (from $(0, -1)$)
- Level 3 nodes: $(0, 1, 2, 3)$ and $(0, 1, 2, -1)$ (from $(0, 1, 2)$); $(0, -1, 1)$ and $(0, 1, -1, 0)$ (from $(0, 1, -1)$); $(0, 1, -1, -2)$ and $(0, -1, -2, -3)$ (from $(0, -1, -2)$)
- Level 4 nodes: $(0, 1, -1, 2)$ and $(0, -1, 1, 2)$ (from $(0, 1, 2, -1)$); $(0, -1, 1, 0)$ and $(0, -1, 0, 1)$ (from $(0, -1, 1)$); $(0, -1, 1, -2)$ and $(0, -1, -2, 1)$ (from $(0, 1, -1, -2)$)

Approximation symbols \approx are placed between the following pairs of nodes:

- $(0, 1, -1)$ and $(0, -1, 1)$
- $(0, 1, 2, -1)$ and $(0, 1, -1, 2)$
- $(0, 1, -1, 0)$ and $(0, -1, 1, 0)$
- $(0, 1, -1, -2)$ and $(0, -1, 1, -2)$
- $(0, 1, -1, 2)$ and $(0, -1, 1, 2)$

- Observá-mos então que a cada conteúdo $\delta \in \mathcal{R}_n$ corresponde um único λ -diagrama de Young, apesar do contrário não se verificar pois cada λ -diagrama está muitas vezes associado a diferentes conteúdos;
- Iremos agora provar que os conteúdos verificam as mesmas três propriedades verificadas pelos pesos no lema 4.1.10.

- [1] $\delta_1 = 0$;
- [2] $\{\delta_i - 1, \delta_i + 1\} \cap \{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}\} \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$;
- [3] *Se $\delta_i = \delta_j = a$, para algum $i < j \leq n$, então*

$$\{a-1, a+1\} \subseteq \{\delta_{i+1}, \dots, \delta_{j-1}\}.$$

Demonstração.

- [1] A entrada 1 em Q_δ está localizada, obrigatoriamente, na primeira linha e primeira coluna do quadro (por se tratar de um quadro *standard*) e por isso

$$\therefore \delta_1 = 1 - 1 = 0.$$

- [2] Seja $i \in \{2, \dots, n\}$.

A caixa C_i , onde se encontra a entrada i em Q_δ , tem, obrigatoriamente, uma caixa adjacente em cima ou do seu lado esquerdo e, em ambos os casos, a entrada dessa caixa terá de ser obrigatoriamente inferior a i (por se tratar de um quadro *standard*).

- 1.º caso** Suponhamos que C_i tem uma caixa adjacente em cima, ou seja, existe em Q_δ uma caixa na mesma coluna e uma linha acima em relação a C_i , por isso, o resíduo da entrada nessa caixa será

$$\delta_i + 1;$$

- 2.º caso** Suponhamos que C_i tem uma caixa adjacente do seu lado esquerdo, ou seja, existe em Q_δ uma caixa na mesma linha e uma coluna à esquerda em relação a C_i , por isso, o resíduo da entrada nessa caixa será

$$\delta_i - 1.$$

Pelos dois casos anteriores podemos concluir que

$$\therefore \{\delta_i - 1, \delta_i + 1\} \cap \{\delta_1, \dots, \delta_{i-1}\} \neq \emptyset;$$

- [3] Sejam $i < j \leq n$.

Consideremos C_i a caixa ocupada pela entrada i e C_j a caixa ocupada pela entrada j . Suponhamos ainda que

$$\delta_i = \delta_j = a.$$

Sendo assim as entradas i e j estão numa mesma diagonal de Q_δ e, obrigatoriamente, C_j está pelo menos uma linha abaixo e pelo menos uma coluna à direita de C_i . Isto implica que i e j não são inteiros consecutivos e que existe em Q_δ uma caixa na mesma linha de C_i e uma coluna à direita, que designaremos por C_{i+} , e uma outra caixa na mesma linha de C_j e uma coluna à esquerda, que designaremos por C_{j-} , e as entradas nessas caixas serão obrigatoriamente inteiros entre i e j (por se tratar de um quadro *standard*).

- 1.º caso** Pela forma como a caixa C_{i+} foi definida temos que a sua entrada terá como resíduo

$$a + 1;$$

- 2.º caso** Pela forma como a caixa C_{j-} foi definida temos que a sua entrada terá como resíduo

$$a - 1.$$

Pelos dois casos anteriores podemos concluir que

$$\therefore \{a-1, a+1\} \subseteq \{\delta_{i+1}, \dots, \delta_{j-1}\}.$$

□

Observações: Terminamos esta secção formalizando uma consequência direta da proposição 3.2.2, importante para a primeira demonstração da última secção deste trabalho.

Lema 4.2.3. *Se $\delta, \eta \in \mathcal{R}_n$ e $\delta \approx \eta$ então η pode ser obtido a partir de δ através de uma cadeia de transposições admissíveis.*

4.3 Resultados Principais

Chegados finalmente à última secção deste trabalho, iremos estabelecer a tão desejada bijeção entre o *espectro* do grafo \mathbb{B} e o *resumo* do grafo \mathbb{Y} , tendo em conta as propriedades verificadas tanto num conjunto como noutro.

Tendo este assunto resolvido, podemos chegar à conclusão que estes grafos são equivalentes tanto no número de vértices por nível como no número e disposição de caminhos.

Lema 4.3.1. *Seja Ω o conjunto de todos os elementos*

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

que verificam as seguintes propriedades:

- (i) $x_1 = 0$;
- (ii) $\{x_i - 1, x_i + 1\} \cap \{x_1, \dots, x_{i-1}\} \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$;
- (iii) *Se $x_i = x_j = a$, para algum $i < j$, então*

$$\{a-1, a+1\} \subseteq \{x_{i+1}, \dots, x_{j-1}\}.$$

Tem-se que

$$\Omega = \mathcal{R}_n.$$

Demonstração.

\supseteq Trivial.

\subseteq Seja $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Tendo em conta que $x_1 = 0$ e utilizando recursivamente o ponto (ii) podemos concluir que

$$\therefore x \in \mathbb{Z}^n.$$

Consideremos Q , λ -quadro de Young, em que as suas entradas irão ser colocadas uma a uma respeitando os seguintes pontos:

- (I) a i -ésima entrada tem resíduo x_i ;
- (II) se i é a 1.^a entrada que tem resíduo k , para um certo $k \in \{x_1, \dots, x_n\}$, então C_i é a 1.^a caixa da sua diagonal;
- (III) se $j < i$, $x_i = x_j$ e $\nexists j < l < i : x_i = x_l = x_j$ então

$$\text{coluna}(C_i) = \text{coluna}(C_j) + 1 \quad \text{e} \quad \text{linha}(C_i) = \text{linha}(C_j) + 1.$$

Coloquemos as entradas por ordem crescente em Q .

$C_1 \rightarrow$ Tendo em conta (I) e (II) temos obrigatoriamente que

$$\text{coluna}(C_1) = \text{linha}(C_1) = 1, \tag{4.3}$$

ou seja, até $i = 1$ temos que Q é um quadro de Young *standard*.

$C_i \rightarrow$ Suponhamos que até à entrada $i-1$ o quadro de Young Q é *standard*.

Coloquemos agora a entrada i em Q .

1.º caso Suponhamos que C_i é a 1.^a caixa da sua diagonal. Então C_i ou não tem caixas adjacentes acima ou do seu lado esquerdo, ou seja, encontra-se na 1.^a linha ou na 1.^a coluna do quadro.

1.º subcaso Suponhamos que $\text{linha}(C_i) = 1$.

Por hipótese de indução sabemos que não existem caixas preenchidas nem à direita nem abaixo de C_i e por isso o ponto (ii) garante-nos que a caixa adjacente à esquerda de C_i tem de se encontrar obrigatoriamente preenchida.

2.º subcaso Suponhamos que $\text{coluna}(C_i) = 1$.

Por hipótese de indução sabemos que não existem caixas preenchidas nem à direita nem abaixo de C_i e por isso o ponto (ii) garante-nos que a caixa adjacente acima de C_i tem de se encontrar obrigatoriamente preenchida.

2.º caso Suponhamos que já existe uma caixa C_l preenchida na diagonal de C_i . Por (III) podemos assumir que

$$\text{coluna}(C_l) = \text{coluna}(C_i) - 1 \quad \text{e} \quad \text{linha}(C_l) = \text{linha}(C_i) - 1.$$

O ponto (iii) garante-nos que existem pelo menos dois inteiros entre l e i e, por hipótese de indução, as suas caixas terão de estar à direita ou abaixo de C_l . Novamente pelo ponto (iii) sabemos que as caixas destas entradas não podem estar todas à direita nem todas abaixo de C_l e por isso temos a garantia de que as caixas adjacentes à esquerda e acima de C_i se encontram ambas preenchidas.

Tendo em conta os vários casos apresentados podemos concluir que para todo o $i \leq n$ o quadro Q preenchido com as entradas até i é um quadro de Young *standard*.

$$\therefore x \in \mathcal{R}_n.$$

□

Lema 4.3.2. *Se $\delta \in \mathcal{R}_n$ e $\delta \approx \gamma$, para algum $\gamma \in \mathcal{E}_n$, então*

$$\delta \in \mathcal{E}_n \quad e \quad \delta \sim \gamma.$$

Demonstração. Seja $\delta = \delta_Q$.

Pelo lema 4.3.1, sabemos que existe um quadro de Young standard, R , tal que

$$\gamma = \delta_R.$$

Como $\delta \approx \gamma$ temos obrigatoriamente que Q e R são quadros do mesmo diagrama de Young e por isso, tendo em conta o ponto [3] do corolário 4.1.8, basta agora provarmos que podemos ir de δ_R até δ_Q através de uma cadeia de transposições admissíveis, mas isso é-nos dado pelo lema 4.2.3. \square

Teorema 4.3.3.

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{E}_n \quad e \quad \sim = \approx.$$

Demonstração. Consideremos o quociente \mathcal{R}_n / \sim . Temos que

$$\#\{\mathcal{R}_n / \approx\} = \#\{S_n^\vee\} = p(n).$$

Pelo lema 4.3 sabemos que cada classe de equivalência em \mathcal{R}_n / \approx ou não contém elementos de \mathcal{E}_n ou é um subconjunto de uma classe de equivalência em \mathcal{E}_n / \sim .

Além disso, tendo em conta que

$$\#\{\mathcal{E}_n / \sim\} = \#\{S_n^\wedge\} = p(n),$$

qualquer classe de equivalência em \mathcal{R}_n / \approx terá de coincidir obrigatoriamente com alguma classe de equivalência em \mathcal{E}_n / \sim .

$$\therefore \mathcal{R}_n = \mathcal{E}_n \quad e \quad \sim = \approx.$$

\square

Corolário 4.3.4.

$$\mathbb{B} \cong \mathbb{Y}$$

Demonstração. Vimos que os vértices em \mathbb{Y} são os mesmos que em \mathbb{B} e os caminhos em ambos os grafos são indexados pelo mesmo conjunto, em \mathbb{Y} por um quociente dos conteúdos e em \mathbb{B} por um quociente dos espectros, que se provou serem iguais, sabemos que também são em mesmo número e apresentam a mesma disposição.

Concluimos assim que o grafo da ramificação para representações irredutíveis do grupo simétrico é isomorfo ao grafo de Young. \square

Observações: Chegados a este ponto podemos associar a qualquer módulo- $\mathbb{C}S_n$ irredutível V uma partição $\lambda \in \mathcal{P}(n)$.

Exemplo 44. Quando $\lambda = (3)$ o único λ -quadro de Young *standard* é da forma

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Então, neste caso, sabemos que V^λ é unidimensional e

$$\exists v \in \text{base-GZ de } V^\lambda : \quad \gamma(v) = \delta(Q) = (0, 1, 2).$$

conclui-se facilmente que se trata da representação ρ_4 apresentada no capítulo 1 deste trabalho.

De um modo mais geral, consideremos $\lambda = (n)$. O único λ -quadro de Young *standard* é

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array}$$

Então, neste caso, V^λ é unidimensional e o seu único peso é $(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

À representação associada a V^λ dá-se o nome de **representação- S_n trivial**.

Exemplo 45. Quando $\lambda = (1, 1, 1)$ o único λ -quadro de Young *standard* é da forma

$$Q = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Então, neste caso, sabemos que V^λ é unidimensional e

$$\exists v \in \text{base-GZ de } V^\lambda : \quad \gamma(v) = \delta(Q) = (0, -1, -2).$$

conclui-se facilmente que se trata da representação ρ_6 apresentada no capítulo 1 deste trabalho.

De um modo mais geral, consideremos $\lambda = (1, \dots, 1) \in \mathcal{P}(n)$. O único λ -quadro de Young *standard* é

$$Q = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$$

Então V^λ será unidimensional e o seu único peso é $(0, -1, -2, \dots, -n+1)$. À representação associada a V^λ dá-se o nome de **representação- S_n sinal**.

Exemplo 46. Quando $\lambda = (2, 1)$ obtemos 2 λ -quadros de Young *standard* distintos

$$Q_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad Q_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Então, neste caso, V^λ tem dimensão 4 e

$$\gamma(v_2) = \delta(Q_2) = (0, 1, -1), \quad \gamma(v_1) = \delta(Q_1) = (0, -1, 1)$$

para certos $v_1, v_2 \in \text{base-GZ de } V^\lambda$.

conclui-se facilmente que se trata da representação ρ_5 apresentada no capítulo 1 deste trabalho.

De um modo mais geral, consideremos $\lambda = (n - 1, 1)$. Os únicos λ -quadros de Young *standard* são da forma

$$Q_i = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline i & \\ \hline \end{array} \dots \square \quad 2 \leq i \leq n$$

Sendo assim, neste caso V^λ tem dimensão $n - 1$ e os seus pesos são da forma $\gamma(v_i) = (a_1, \dots, a_n)$ onde $\forall j \in \{1, \dots, n\}$,

$$a_j = \begin{cases} -1 & \text{se } j = i, \\ j - 1 & \text{se } j < i, \\ j - 2 & \text{se } j > i. \end{cases} \quad (2 \leq i \leq n)$$

À representação associada a V^λ dá-se o nome de **representação- S_n standard**.

Observações: Observe-se então que partindo de uma cadeia de álgebras

$$\mathbb{C}S_0 \subset \mathbb{C}S_1 \subset \dots$$

provámos que a regra da ramificação é livre de multiplicidade e estudámos algumas características do grafo da ramificação \mathbb{B} de forma a podemo-lo identificar com o grafo de Young \mathbb{Y} . Isto levou-nos a uma classificação dos módulos- $\mathbb{C}S_n$ irredutíveis para todo o n e, ao mesmo tempo, a uma descrição da regra da ramificação.

Bibliografia

- [CR] C. Curtis, I. Reiner. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. American Mathematical Society (1962).
- [FH] W. Fulton, J. Harris. *Representation Theory*. Springer-Verlag (1991).
- [Kl] A. Kleshchev. *Linear and Projective Representations of Symmetric Groups*. Cambridge University Press (2005).
- [OV] A. Okounkov, A. Vershik. *A New Approach to Representation Theory of Symmetric Groups*. Selecta Mathematica, New Series, vol. 2, No. 4, 581-605 (1996).
- [Su] S. Ariki. *Representations of Quantum Algebras and Combinatorics of Young Tableaux*. American Mathematical Society (2002).
- [Br] Owen J. Brison. *Grupos e Representações*. Textos de Matemática, vol. 12, Departamento de Matemática da FCUL (1999).
- [No] Teresa Nogueira. *Apontamentos das aulas de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Departamento de Matemática da FCUL (1999/2000).
- [Fr] Pedro J. Freitas. *Tópicos de Álgebra Superior*. Textos de Matemática, vol. 19, Departamento de Matemática da FCUL (2005).
- [Ga] Luísa Galvão. *Apontamentos das aulas de Módulos e Anéis*. Departamento de Matemática da FCUL (2006/2007).
- [Mo] António J. Monteiro. *Álgebra - Um primeiro curso*. Escolar Editora, Lisboa (2001).
- [BB] A. Bjorner, F. Brenti. *Combinatorics of Coxeter Groups*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 231, Springer, New York (2005).
- [Na] M. Nazarov. *Young's orthogonal form for Brauer's Centralizer Algebra*. J. Algebra, vol. 181 (1996).
- [RV] F. Rodriguez-Villegas. *Representation Theory (Fall 2004)*. Department of Math, Austin (2004).

-
- [Zh] Yufei Zhao. *Young Tableaux and the Representations of the Symmetric Group*.
Harvard College Mathematics Review 2 (2008).

Índice Remissivo

- $(\)_{n,m}^i$, 15
- $\langle G \rangle$, 2
- C_k , 16
- J_i , 12
- J_i^* , 16
- S_n , 3
- S_n^\vee , 6
- T_γ , 49
- V^γ , 49
- $Z_{n,m}^i$, 15
- $[n]$, 2
- \approx , 61
- $\mathbb{C}S_n$, 11
 - centralizador de, 13
 - centro de, 13
- γ_T , 49
- \mathbb{B} , 29
- \mathbb{Y} , 39
- \mathcal{B}_i , 56
- \mathcal{E}_n / \sim , 49
- \mathcal{E}_n , 48
- \mathcal{H}_2 , 52
- $\mathcal{L}(a, b)$, 53
- $\mathcal{P}(n)$, 37
- \mathcal{R}_n / \approx , 62
- \mathcal{R}_n , 61
- ρ_1 , 21
- ρ_2 , 21
- ρ_3 , 21
- ρ_4 , 22
- ρ_5 , 22
- ρ_6 , 22
- ρ_γ , 49
- \sim , 49
- c_i , 60
- e_G , 2
- $p(n)$, 37
- s_i , 5, 52
- v_γ , 49
- álgebra
 - $-\mathbb{K}$, 11
 - do grupo, 11
 - Hecke afim degenerada de classe 1, 52
- base-GZ, 33
- caixa
 - removível, 40
- ciclos, 4
 - comprimento de, 4
- ciclos disjuntos, 4
- conjugados
 - classes de, 6
- diagonal, 44
- elemento-JM, 12
- elementos
 - soma de classes, 14
- espetro, 48
- filtro, 15
- Gelfand-Zetlin, 33
 - base de, 33
 - subálgebra de, 33
- grafo
 - da ramificação, 29
 - de Young, 39
- grupo, 1

- ação de um, 7
- comutativo, 2
- finito, 2
- gerado por um conjunto, 2
- ordem do, 2
- grupo simétrico, 3
- lema
 - Schur, 24
- livre de multiplicidade, 30
- módulo, 19
 - isomorfo, 20
- modelo de ciclos, 6
 - com marcas, 8
- partições, 37
 - $\mathcal{P}(n)$, 37
- permutação, 2
 - conjugada, 5
 - conjugada- S_n , 8
- peso, 47
- quadro de Young
 - conteúdo, 60
 - atuação de uma permutação num, 44
- regra da ramificação, 29
- representação, 18
 - equivalente, 20
 - irredutível, 20
 - sinal, 23, 67
 - standard, 23
 - trivial, 23, 67
 - standard, 67
- resíduo, 60
- resumo, 61
- submódulo, 20
 - irredutível, 20
- teorema
 - Maschke, 24, 29
 - Wedderburn-Artin, 25
- transposição, 5
 - admissível, 44
 - básica, 5, 52
- Young
 - diagrama de, 38
 - quadro canónico de, 42
 - quadro de, 41
 - quadro standard de, 42